Vibrations mécaniques - partie A1

Unité d'enseignement à choix, mais ce n'est pas une option !

Acoustique | *Vibrations*

OU

Outils mathématiques pour l'ingénieur

Cette U.E. est de la même importance que les autres…
Elle est présente dans beaucoup de cursus d'ingénieur en SPI.

Vibrations mécaniques - partie A1

Partie A
systèmes discrets

- *Vibrations des systèmes discrets « masses + ressorts » (1 puis plusieurs)*
- *Modes et fréquences*
- *9h CM & TD*
- *Examen terminal 1h → (CV)*

Partie B
systèmes continus

- *Vibrations des poutres*
- *Modes et fréquences*
- *8h CM & TD*
- *Examen terminal 1h → (DB)*

Partie C
analyse vibratoire

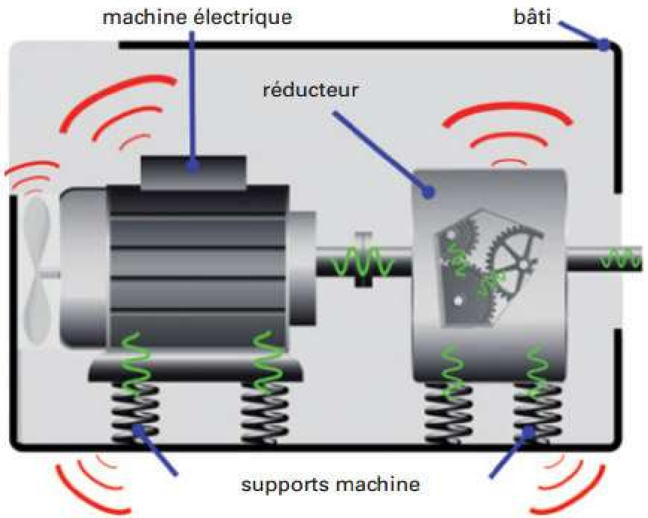
- *Applications aux machines tournantes*
- *Caractérisation des risques*
- *Détection et maintenance*
- *7h CM & TD*
- *Examen terminal 1h → (CV)*

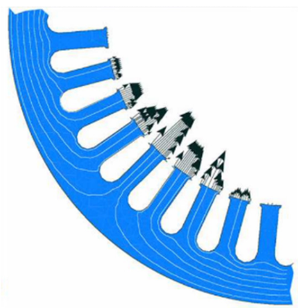
35%

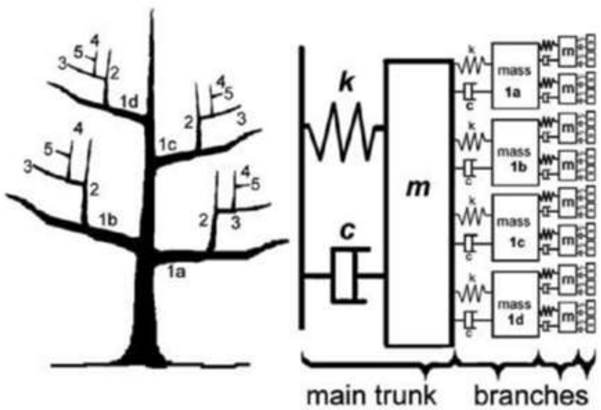
35% restants, cours acoustique

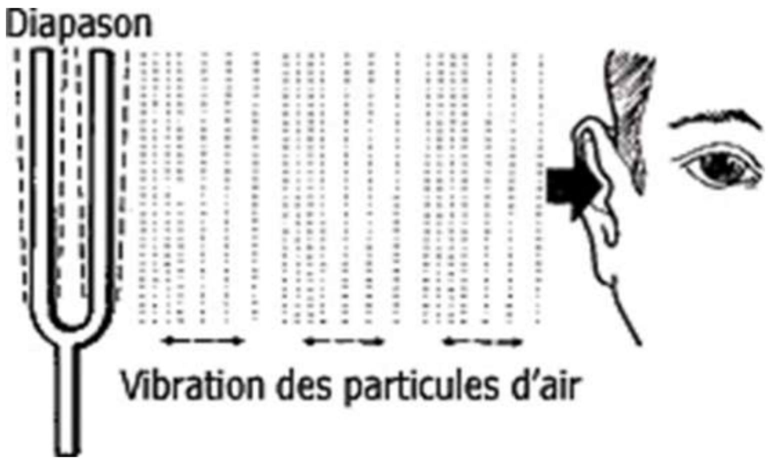
12h TP → 30% → (DB) (CV)

Toutes les structures vibrent









Les structures (et l'air) possèdent :

- *une masse*
- *une élasticité*

→ *Toutes les structures (et l'air) peuvent entrer en vibrations (onde sonore) !*

Toutes les structures vibrent

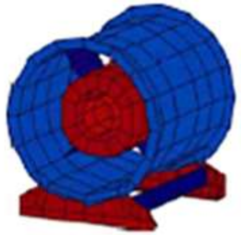
- *vibrations dans les compresseurs, ventilateurs et gaines de ventilation,*
- *vibrations dans les machines thermiques,*
- *vibrations transmises aux bâtiments,*
- *vibrations issues des désalignements d'arbres,*
- *vibrations engendrées par les roulements à billes, les engrenages,*
- *effets vibroacoustiques issus des champs magnétiques dans une machine à haute vitesse de rotation,*
- *modes de vibrations des stators sous l'effet de la pression engendrée sur ses dents, rupture des dents…*

Les voies d’exploration

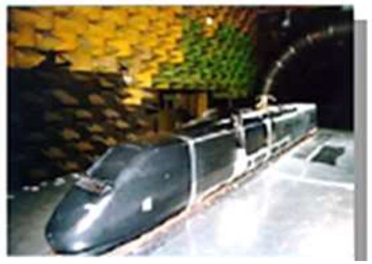
- **la voie analytique**: méthodes de calcul dynamique des structures,

$$\omega^2 = \frac{E\int_0^{\ell} I\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)^2 dx}{\mu\int_0^{\ell} Y^2 dx}$$

- **la voie informatique**: progiciels de calcul fondés sur la méthode des éléments finis,



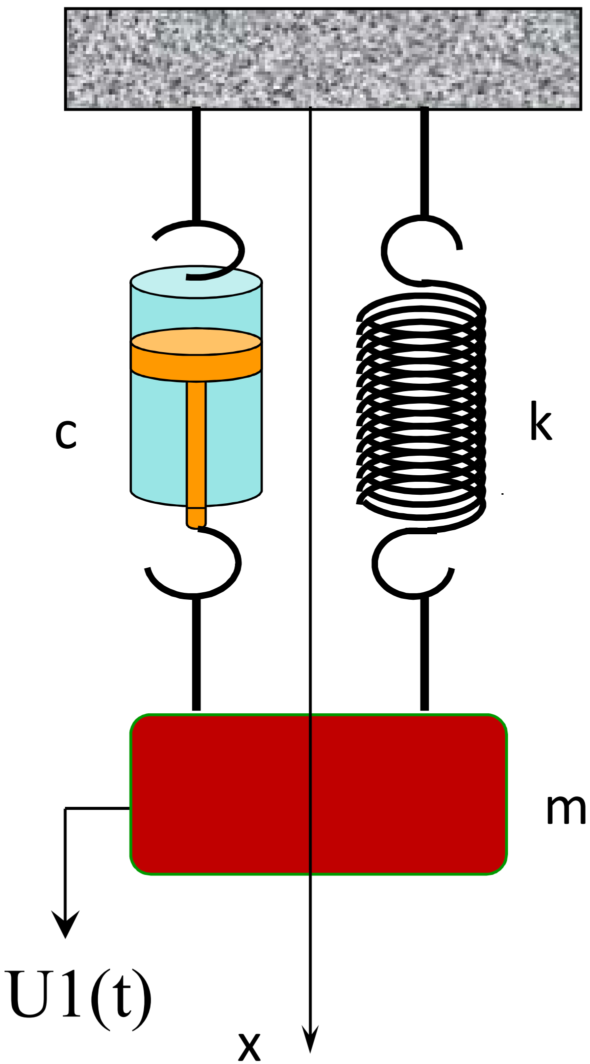
- **la voie expérimentale**: essais en grandeur réelle ou sur maquette



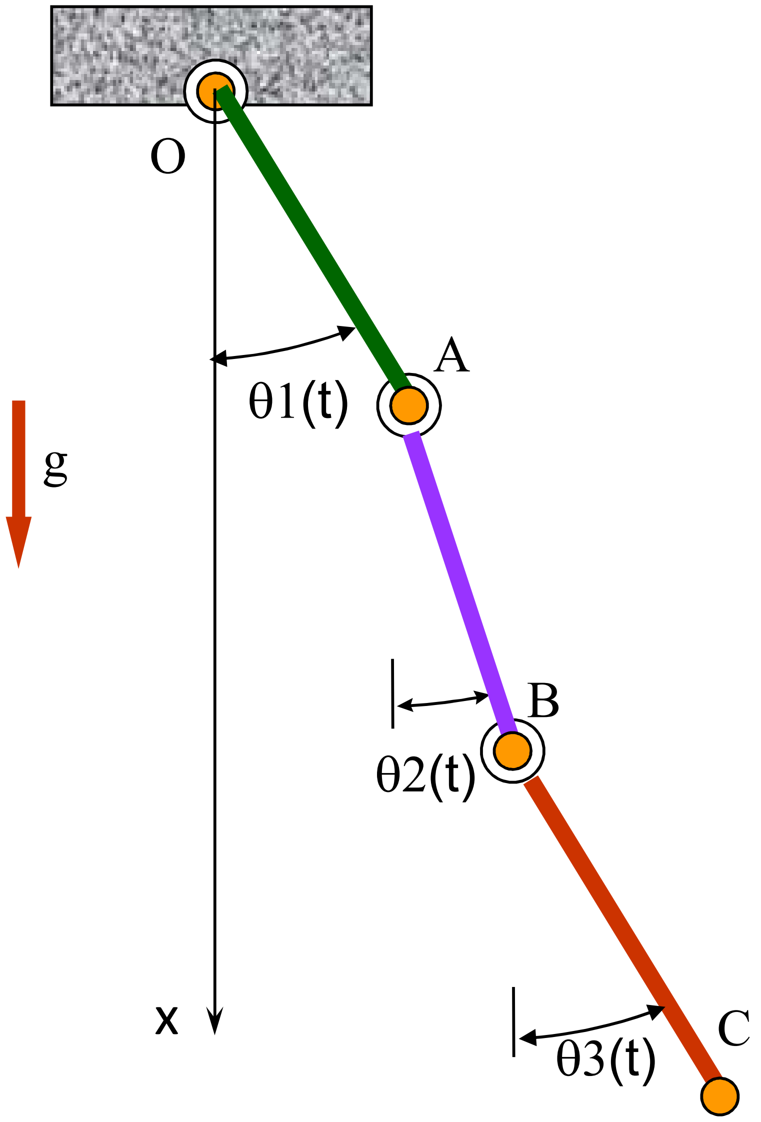
Si la voie numérique s’impose aujourd’hui, la voie analytique reste celle de la réflexion et la voie expérimentale est celle de la validation.

Ces 3 approches nécessitent donc toujours d’être confrontées…

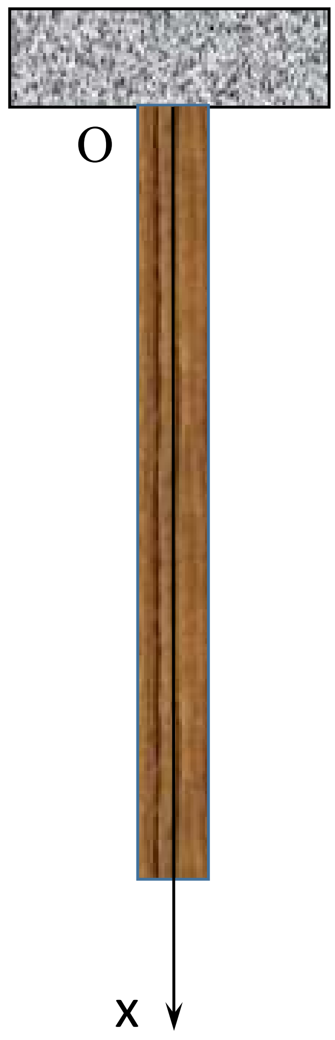
Degrés de liberté



Système à 1 DDL



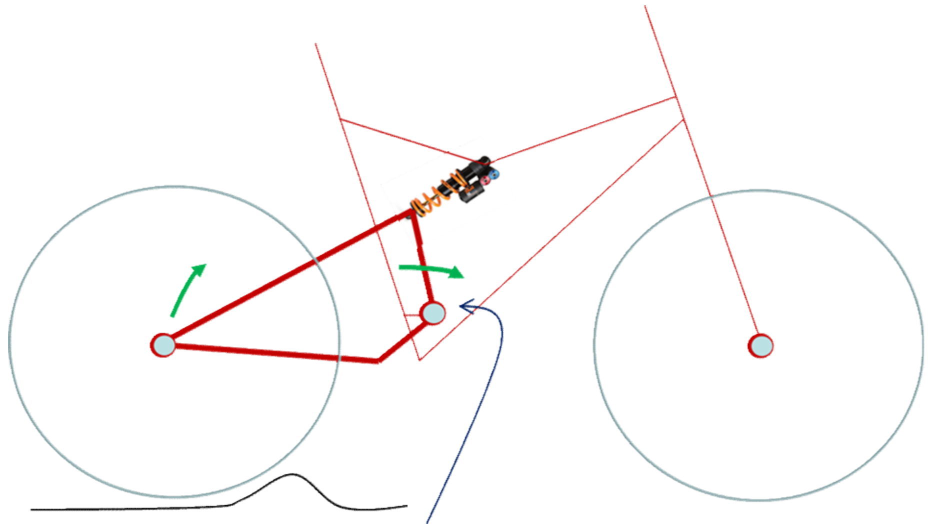
Système couplé → 3 DDL



Système continu
→ ∞ DDL

Etude a : le Rockrider 6.0

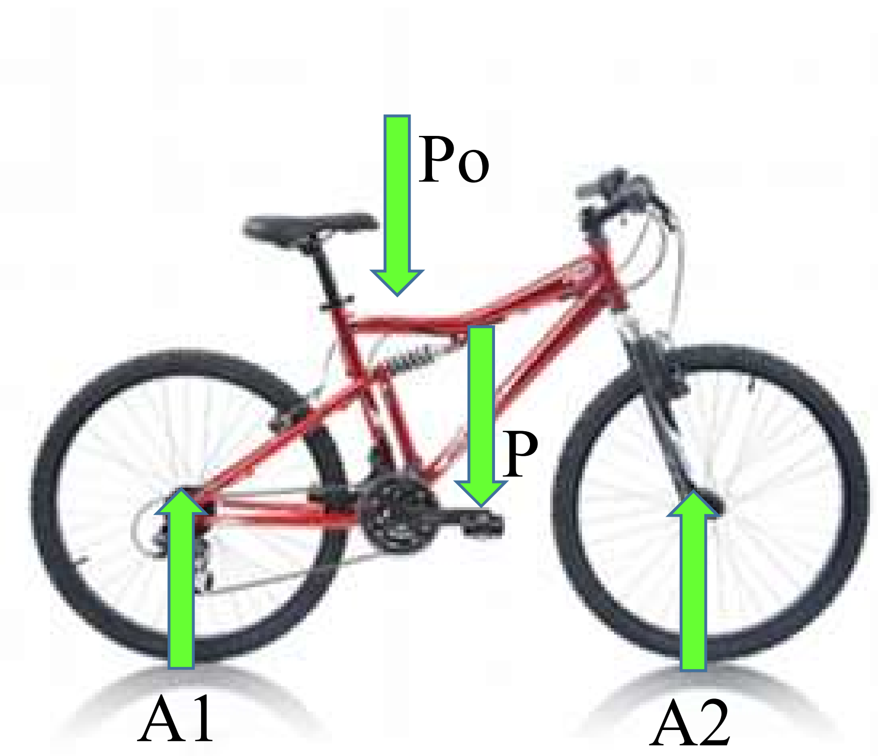
Rockrider 6.0 (Décathlon)



Un cadre de VTT dit MONOPIVOT

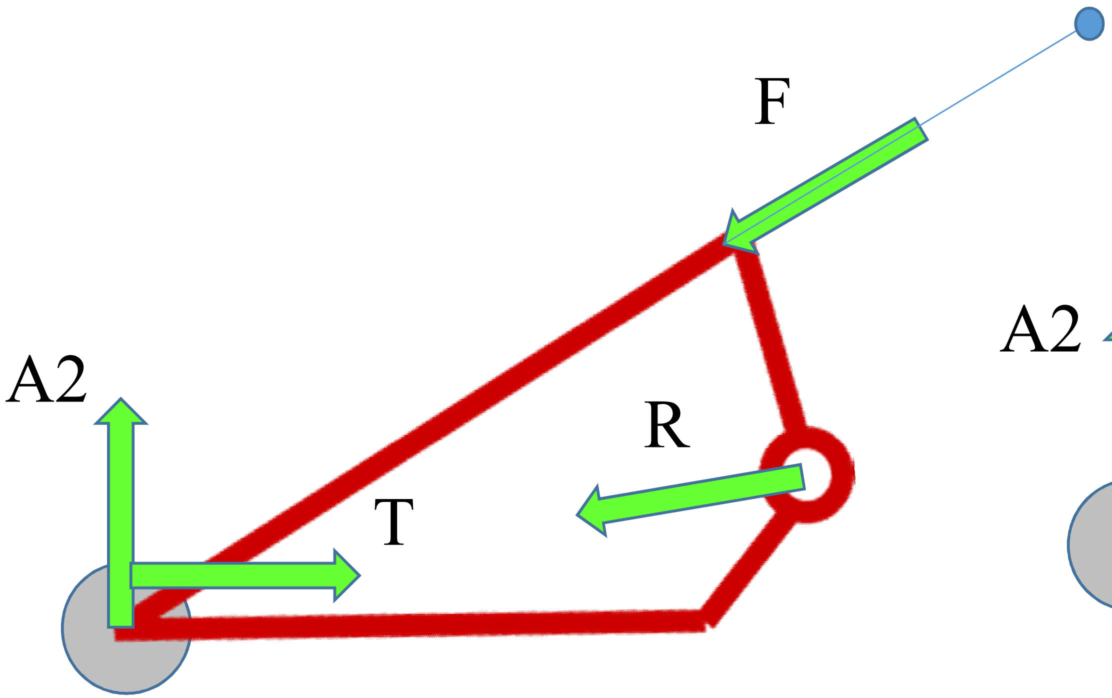
VTT tout suspendu entrée de gamme décliné dans les années 2000, critiqué pour son poids excessif et la cinématique de sa suspension arrière notamment.

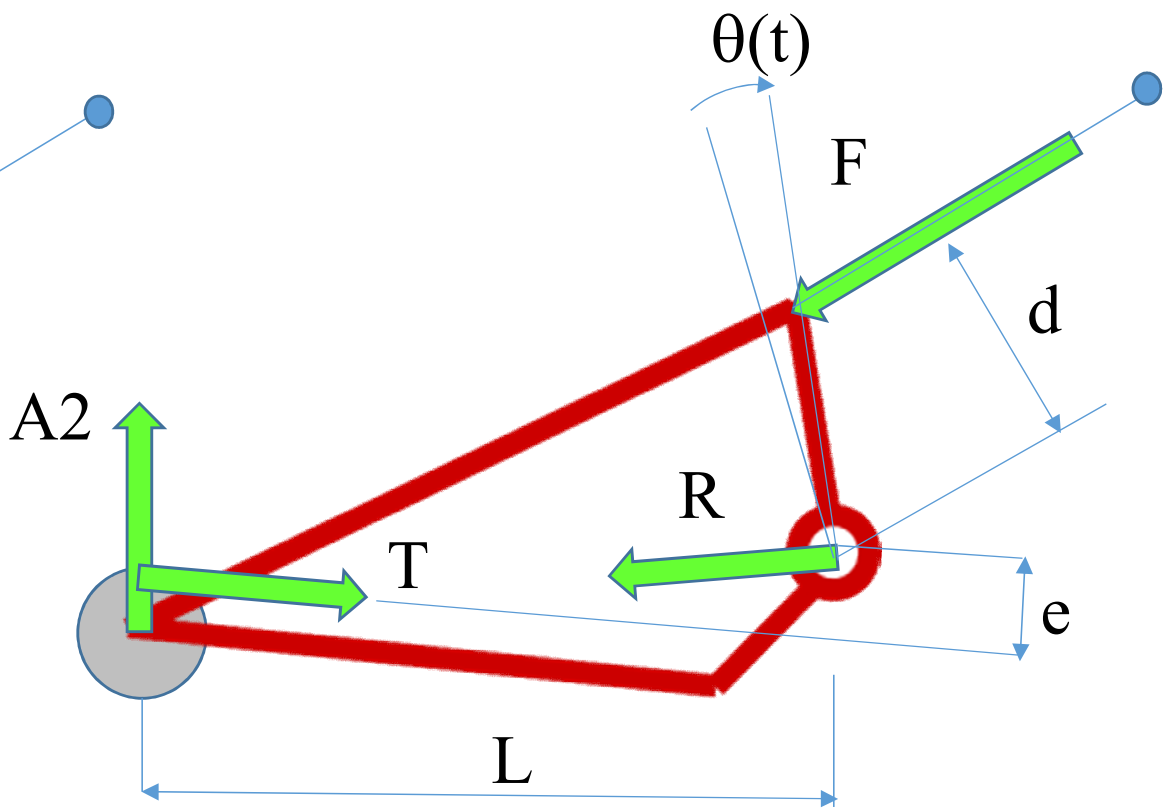
Etude a : le Rockrider 6.0



En première approximation $A1 = A2 = (Po+P)/2$

Etude a : le Rockrider 6.0





T : tension chaîne

P : poids total constant

F : effort suspension (ressort et amortisseur)

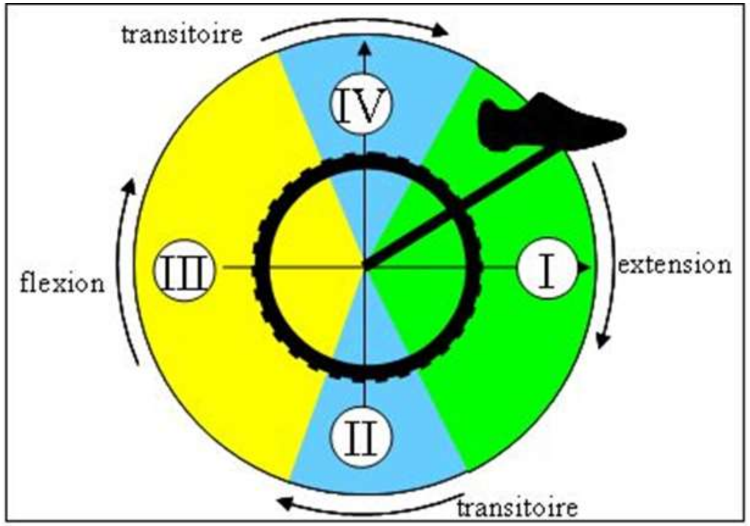
R : réaction du monopivot

$\theta(t)$: angle de rotation du cadre

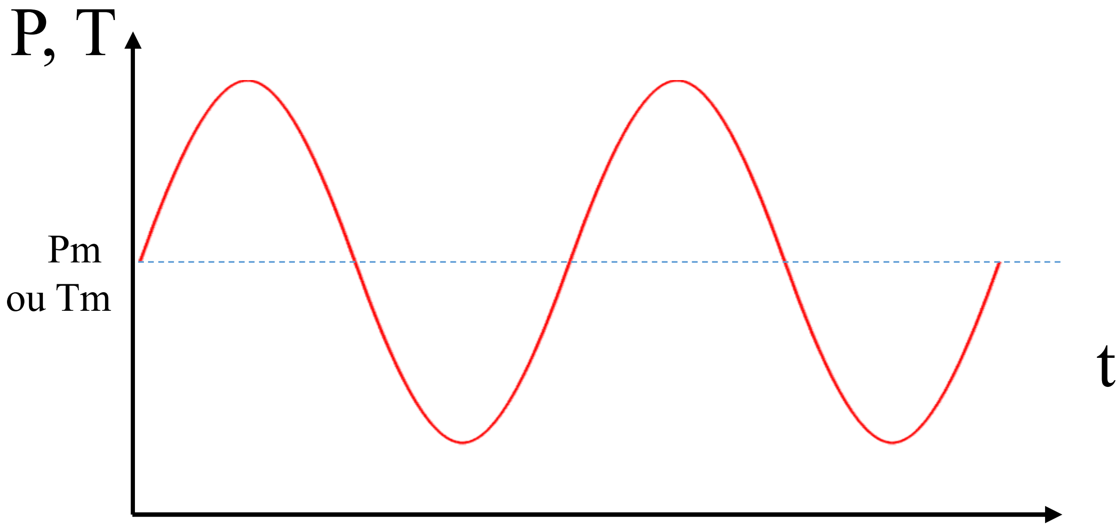
En première approximation les distances variant peu sont donc supposées constantes.

Etude a : le Rockrider 6.0

L'effort sur les pédales varie



Allure temporelle de P et de T



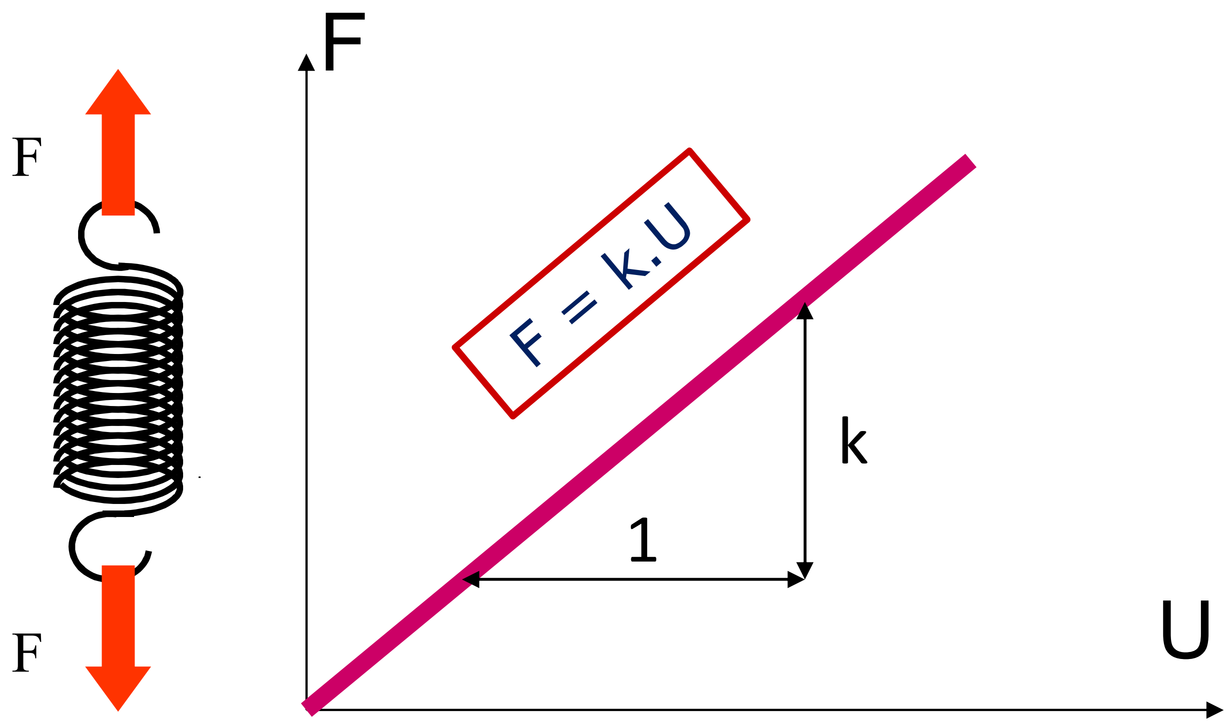
$$P(t) = Pm.(1+\sin\omega t)$$

$$T(t) = Tm.(1+\sin\omega t)$$

$$P(t) = Pm.(1+\sin\omega t)$$

$$T(t) = Tm.(1+\sin\omega t)$$

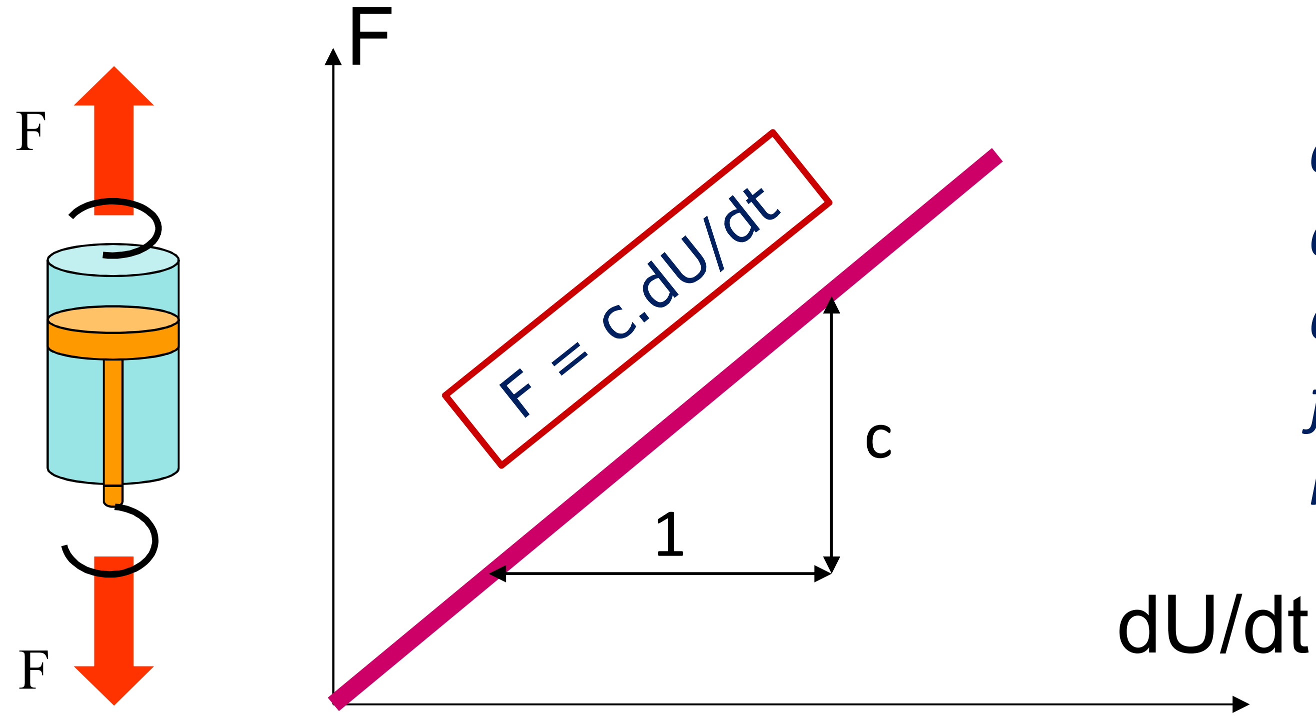
Etude a : comportement ressort



k est lié à la rigidité des liaisons entre atomes, donc au module d'Young E du matériau.

Energie contenue $$E = \int_0^T k.U.\frac{dU}{dt}\,dt$$

Etude a : comportement amortisseur

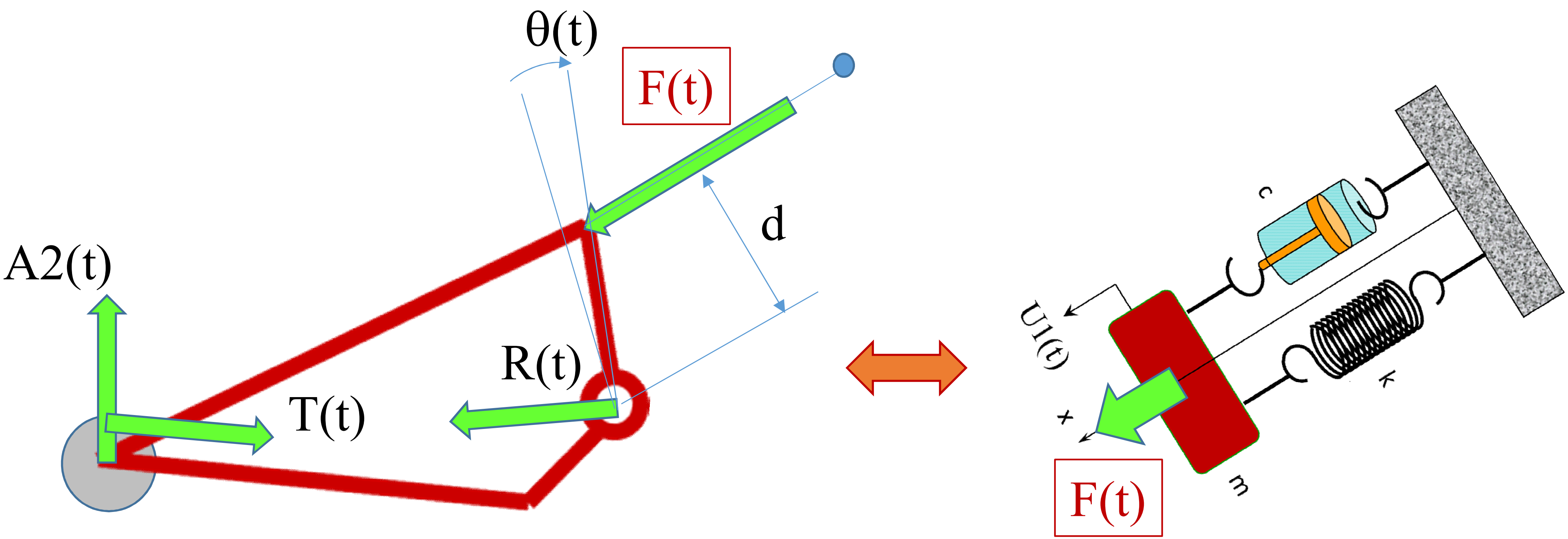


c est lié à la viscosité des liaisons entre atomes, plus ou moins fortes selon les matériaux.

Energie dissipée

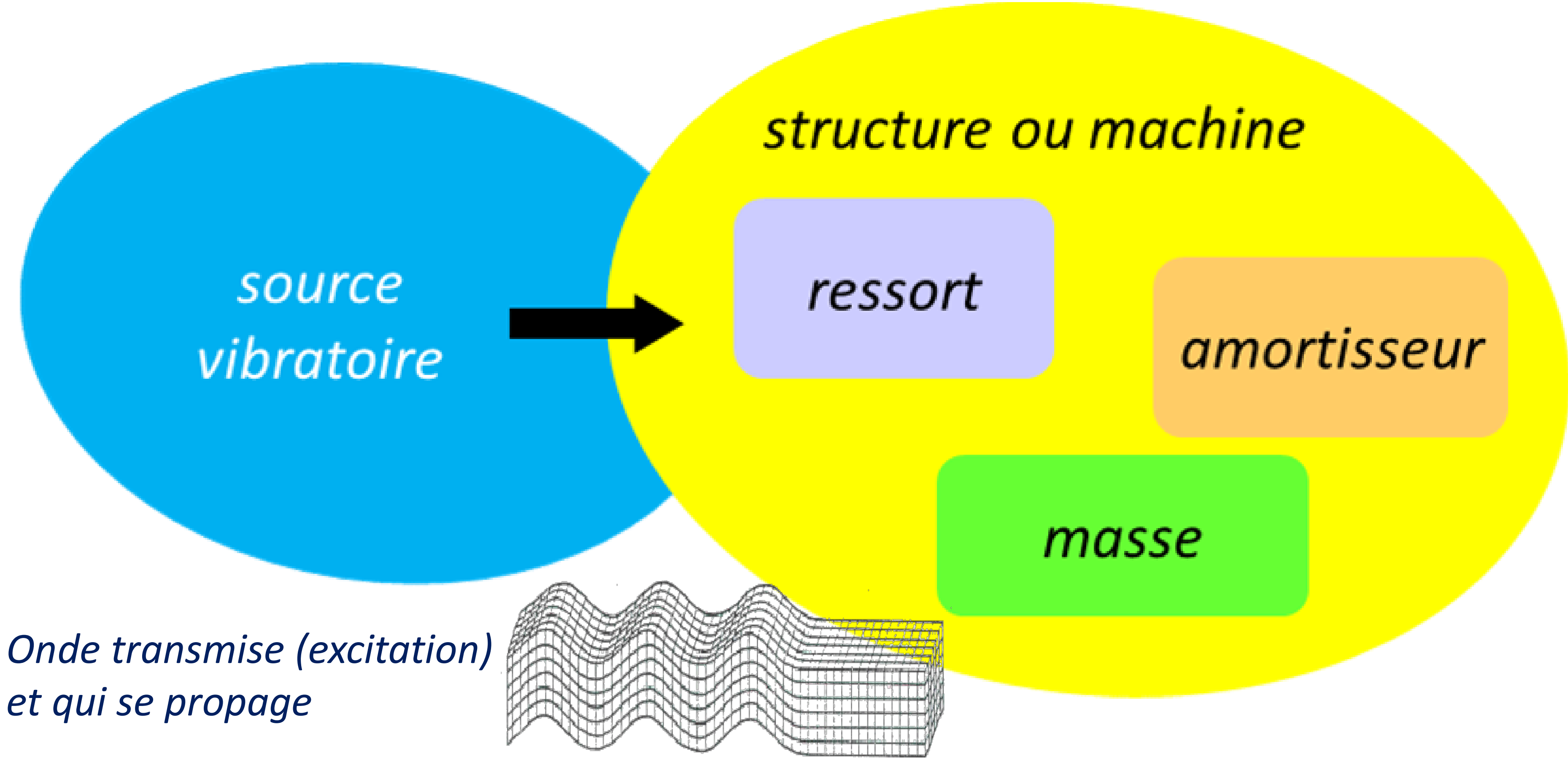
$$E = \int_0^T c.\frac{dU}{dt}.\frac{dU}{dt}dt$$

Etude a : Système à 1 DDL régime forcé



$$\begin{cases} F(t) = F.\sin \Omega.t \\ U1(t) \# d.\theta(t) \end{cases}$$

Etude a : Le régime forcé

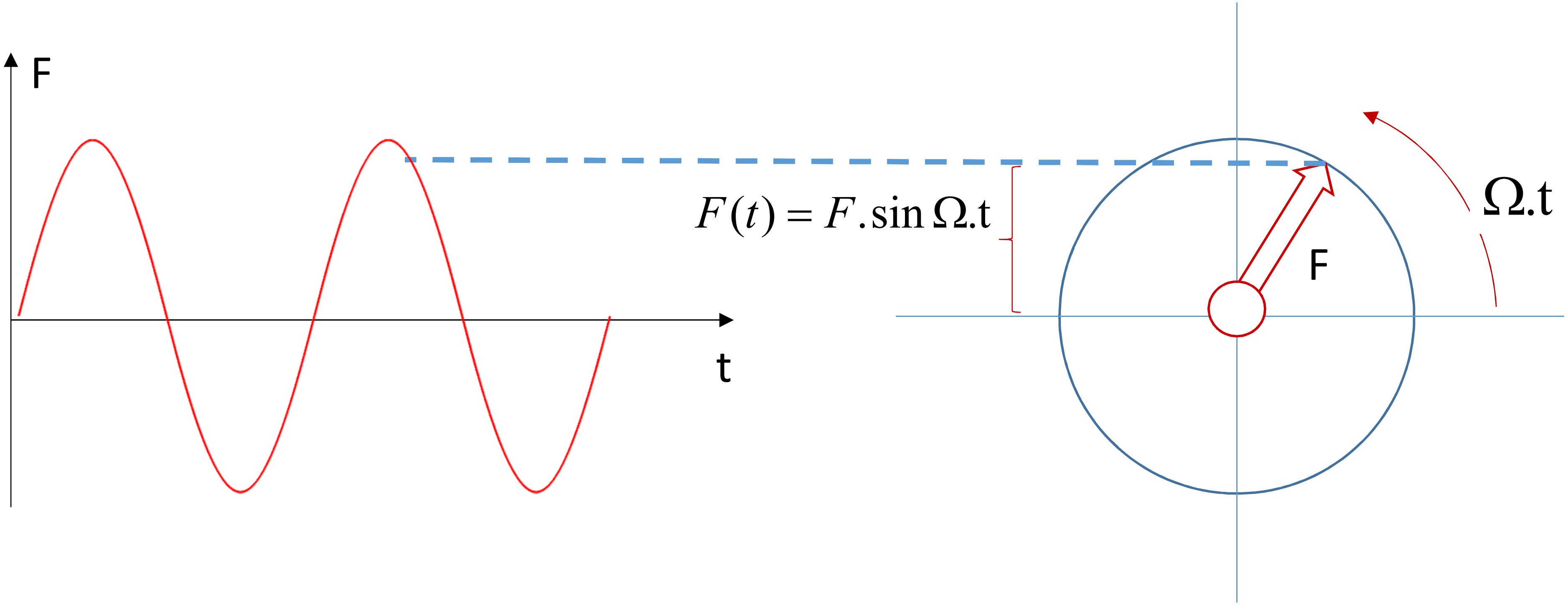


Pulsation imposée … ***…à un système de pulsation naturelle***

Ω ω_o

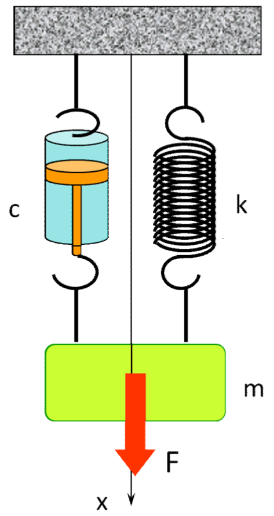
Etude a : Interprétation de Ω

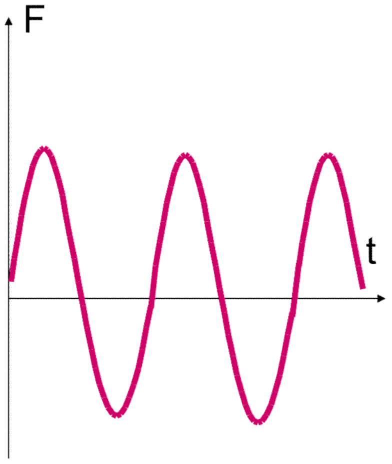
Dans le système « masse + ressort »,
rien ne semble tourner à la vitesse Ω, et pourtant…



Ω[rad/s] est la <u>vitesse de rotation d'un vecteur tournant</u> dont la projection donne F(t).

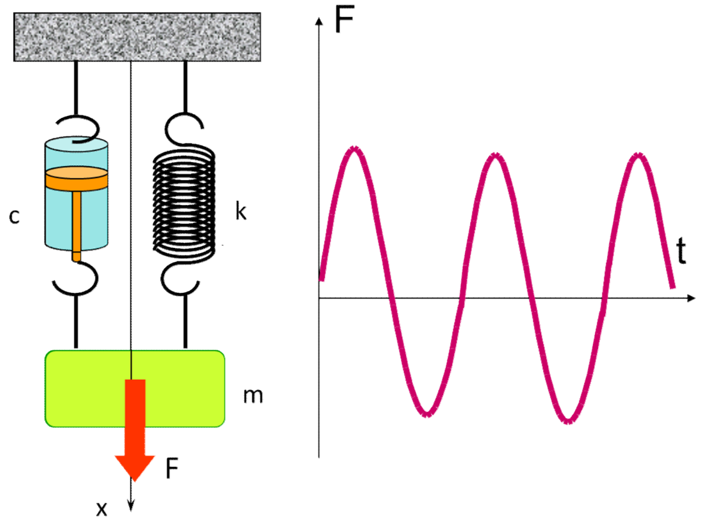
Etude a : Système à 1 DDL régime forcé





PFD appliqué à m…

Etude a : Système à 1 DDL régime forcé



Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à "m"...

$$-F_{ressort} - F_{amortiseur} + \underbrace{F(t)}_{\text{Source}} = m.\ddot{U}$$

$$-K.u - c.\dot{U} + F(t) = m.\ddot{U}$$

$$\ddot{U} + \frac{c}{m}.\dot{U} + \frac{K}{m}.U = F(t)/m$$

On exprimera une solution fonction de coefficients adimensionnels ou pouvant être déterminés facilement.

$$[\%] \ \varepsilon = \frac{C}{Cc}$$

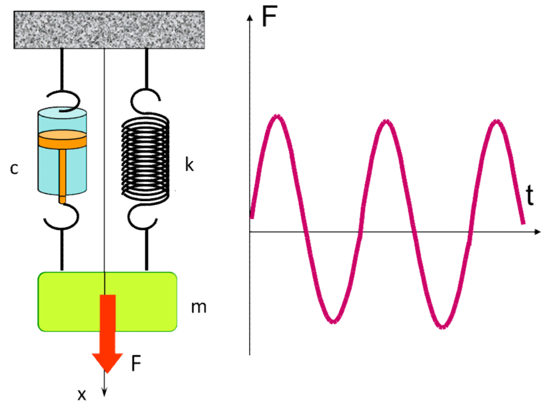
Amortissement critique
$\Delta = 0 \ quand \ C = Cc$

$$\omega o^2 = \frac{K}{m} \quad [\text{rad/s}]$$

$$\ddot{U} + \underbrace{2.\varepsilon.\omega o}_{\text{Peut être connu via des tests}}\dot{U} + \omega o^2.U = F(t)/m$$

If $\Delta = 0$ then $c = c_{critical}$ and 3 possibilities appear ...

Etude a : Système à 1 DDL régime forcé



La solution générale finit être nulle (correspond au régime libre).

On utilise les nombres complexes pour trouver une solution particulière du même type que le second membre : $F(t) = F.\sin(\Omega.t)$

$$\begin{cases} \bar{F} = F.e^{j.\Omega.t} \text{ avec } F(t) = \mathrm{Im}\,\bar{F} \\ \bar{U} = U.e^{j.(\Omega.t-\varphi)} \; avec \; U(t) = \mathrm{Im}\,\bar{U} \end{cases}$$

$$-\Omega^2.\,U.e^{j.(\Omega.t-\varphi)} + 2.\varepsilon.\omega o.j\Omega.\,U.e^{j.(\Omega.t-\varphi)} + \omega o^2.U.e^{j.(\Omega.t-\varphi)} = \frac{F}{m}.e^{j.\Omega.t}$$

$$-\Omega^2.\,U.e^{j.(-\varphi)} + 2.\varepsilon.\omega o.j\Omega.\,U.e^{j.(-\varphi)} + \omega o^2.U.e^{j.(-\varphi)} = \frac{F}{m}$$

Mechanical Vibrations - part 1

$$-\Omega^2.\,U.\,e^{j.(-\varphi)} + 2.\varepsilon.\,\omega o.\,j\Omega.\,U.\,e^{j.(-\varphi)} + \omega o^2.U.\,e^{j.(-\varphi)} = \frac{F}{m}$$

$$U.\,e^{j.(-\varphi)}.[-\,\Omega^2 + \omega o^2 + 2.j.\,\varepsilon.\,\omega o.\quad] = \frac{F}{m}$$

$$||\bar{a}.\,\bar{b}|| = ||\bar{a}||.\,||\bar{\bar{b}}||$$

$$U = \frac{F}{m}.\frac{1}{\sqrt{(-\Omega^2 + \omega o^2)^2 + 4.\varepsilon^2.\omega o^2.\Omega^2}}$$

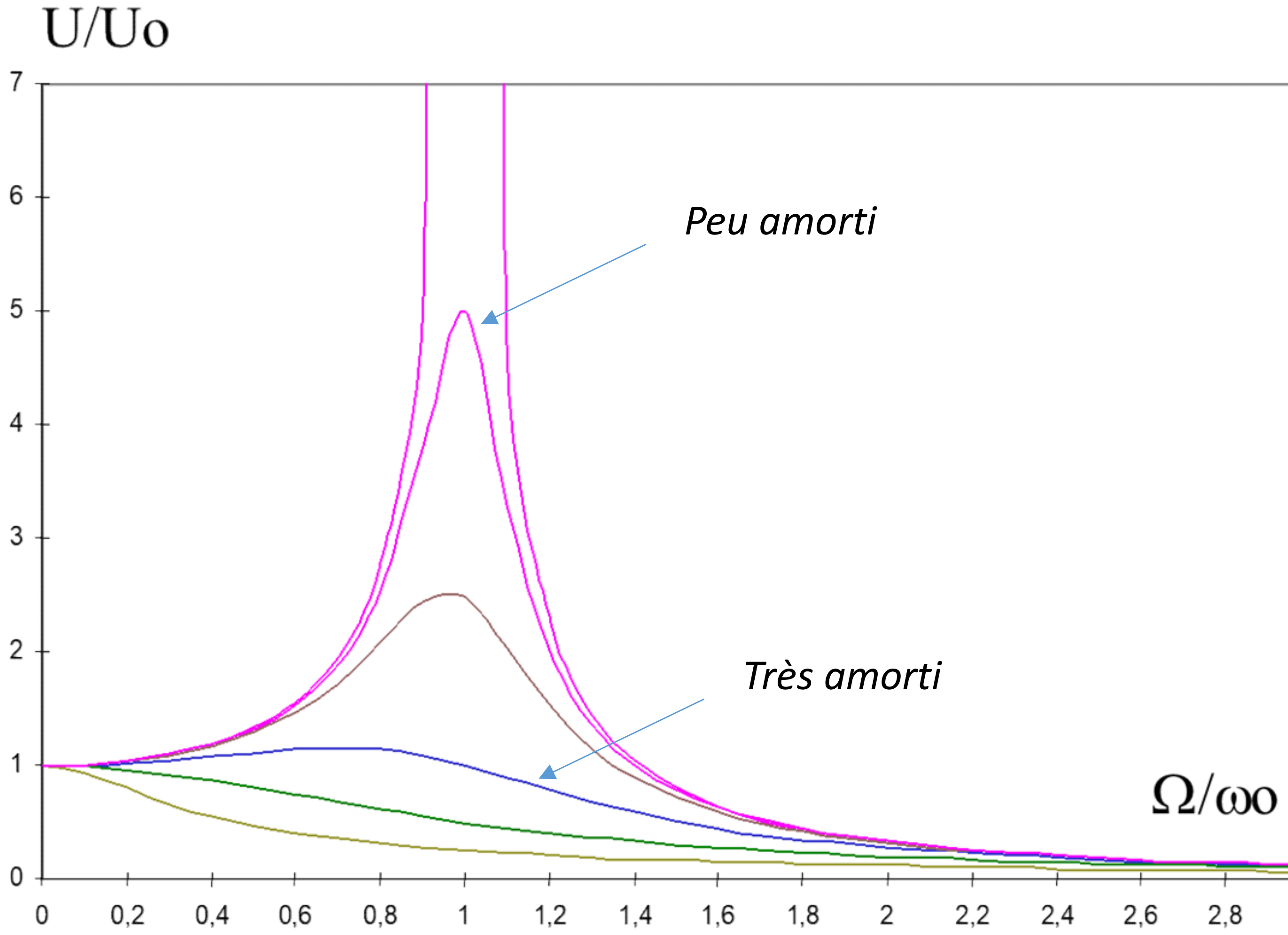
$$\omega o^2 = \frac{K}{m}$$

$$U = \frac{F}{m.\omega o^2}.\frac{1}{\sqrt{(-\frac{\Omega^2}{\omega o^2} + 1)^2 + 4.\varepsilon^2.\quad^2}}$$

$$U = \frac{F}{K}.\frac{1}{\sqrt{(-\frac{\Omega^2}{\omega o^2} + 1)^2 + 4.\varepsilon^2.\frac{\Omega^2}{\omega o^2}}}$$

Etude a : Système à 1 DDL régime forcé

Amplitude :



$$U = \frac{Uo}{\sqrt{(1-\frac{\Omega^2}{\omega o^2})^2 + 4.\varepsilon^2.\frac{\Omega^2}{\omega o^2}}}$$

Etude a : Résonnance

Cherchons le rapport $\dfrac{\Omega}{\omega o}$ *permettant*

d'obtenir la valeur maximale de A.

Ce maximum est atteint si le dénominateur est minimum :

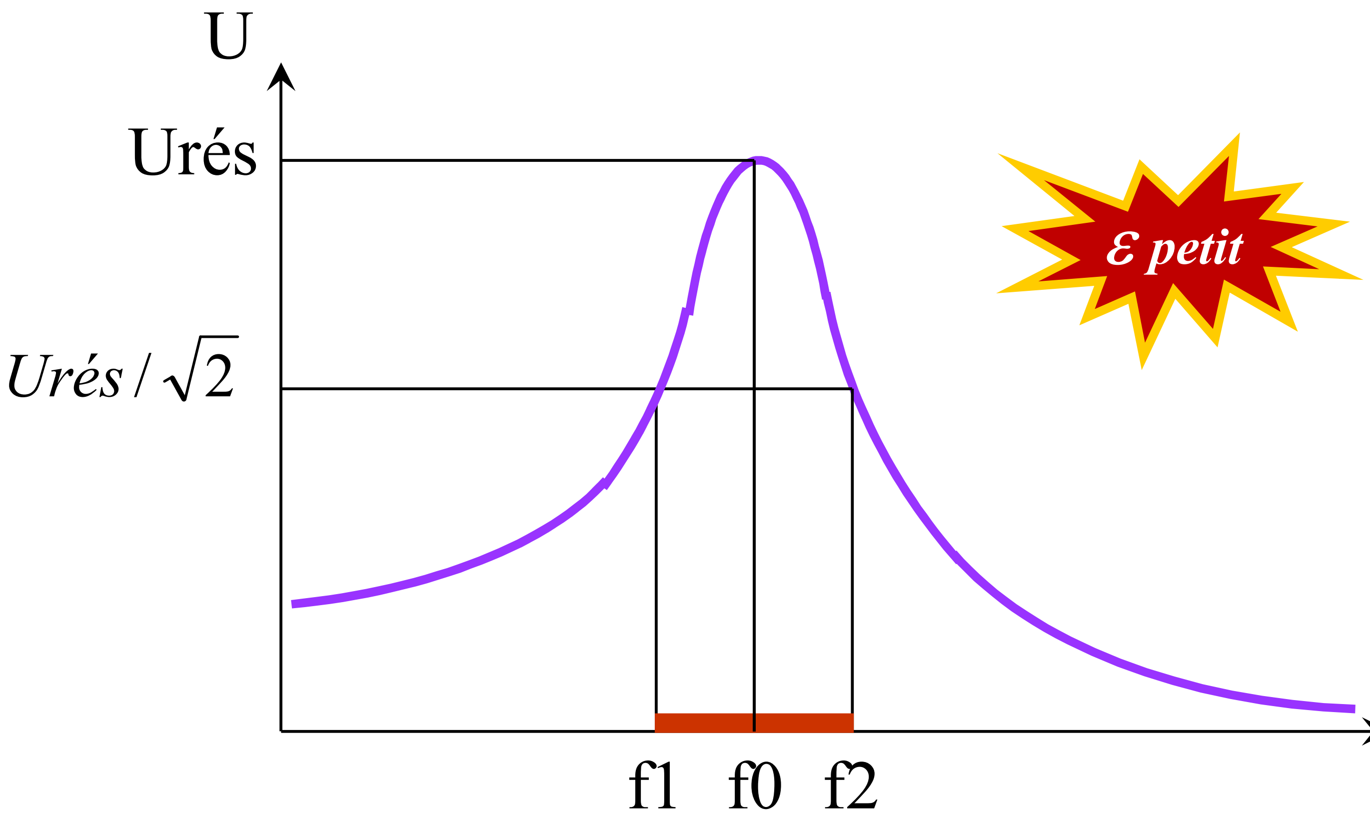
$$\frac{d}{d\Omega}\left\{(1-\frac{\Omega^2}{\omega o^2})^2+4.\varepsilon^2.\frac{\Omega^2}{\omega o^2}\right\}=0$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \frac{\Omega}{\omega o}=\sqrt{1-2\varepsilon^2}}$$

Alors dans ce cas, la valeur maximale de l'amplitude est :

$$U_{résonance}=\frac{Uo}{2\varepsilon.\sqrt{1-\varepsilon^2}} \qquad \textit{pour} \qquad \Omega_{résonance}=\omega o.\sqrt{1-2\varepsilon^2}$$

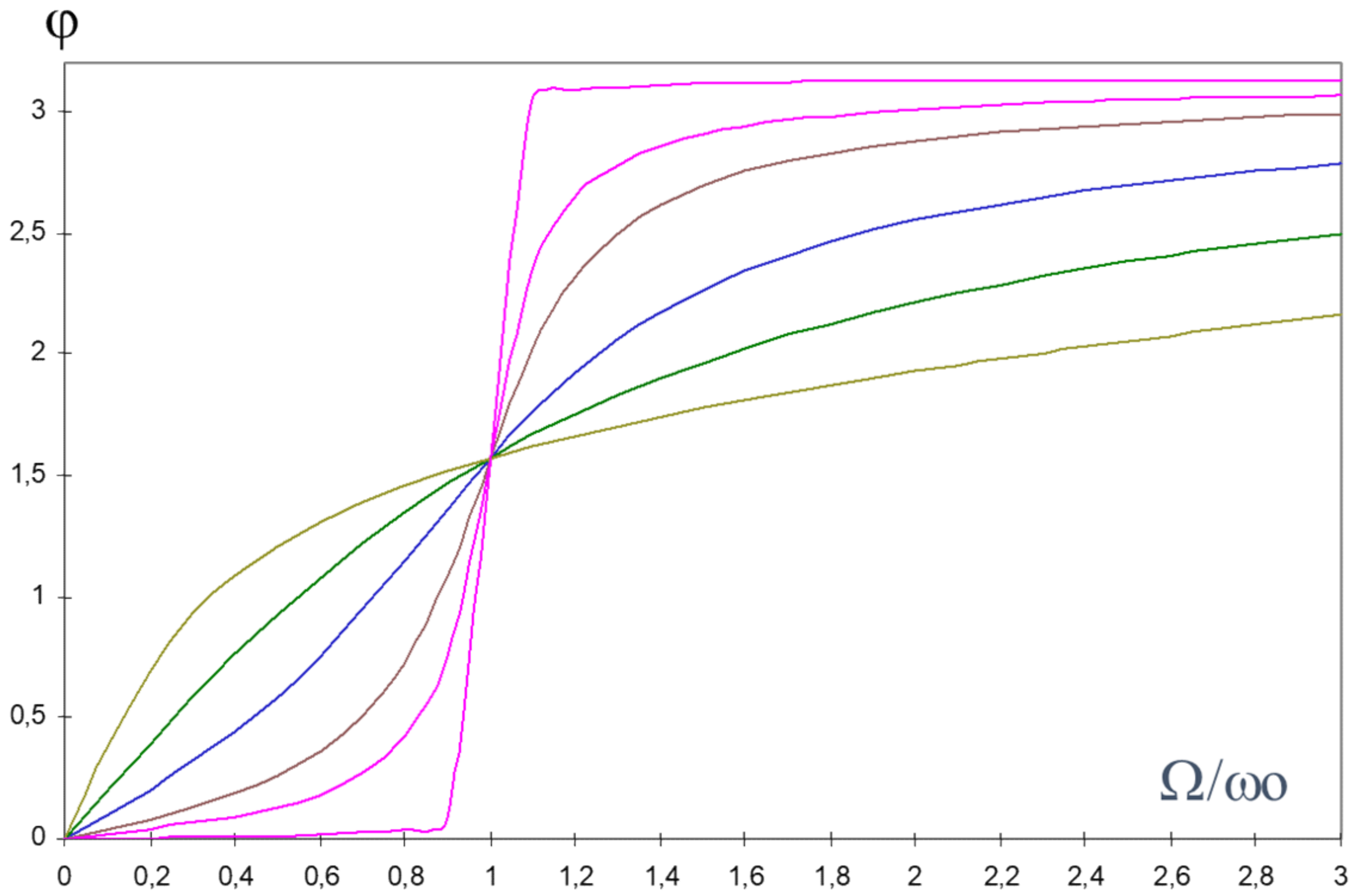
Etude a : Bande passante en mécanique



Largeur de bande passante = f2 - f1
telles que U1 = U2 = Urés/2

En mécanique les bandes passantes sont très étroites…

Etude a : Phase



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2.\varepsilon.\dfrac{\Omega}{\omega o}}{1-\dfrac{\Omega^2}{\omega o^2}}$$

Etude a : Et le Rockrider 6.0 ?

Cas du Rockrider 6.0

Le ressort se comprime de 20 mm sous une charge de 700 N

K = 700/0,02 = 35 000 N/m

La masse m du VTT+ le poids du cycliste = 87,7 kg

$\rightarrow\ \omega o = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{35000}{87{,}7}}\ \#\ 20\,\frac{rad}{s}$

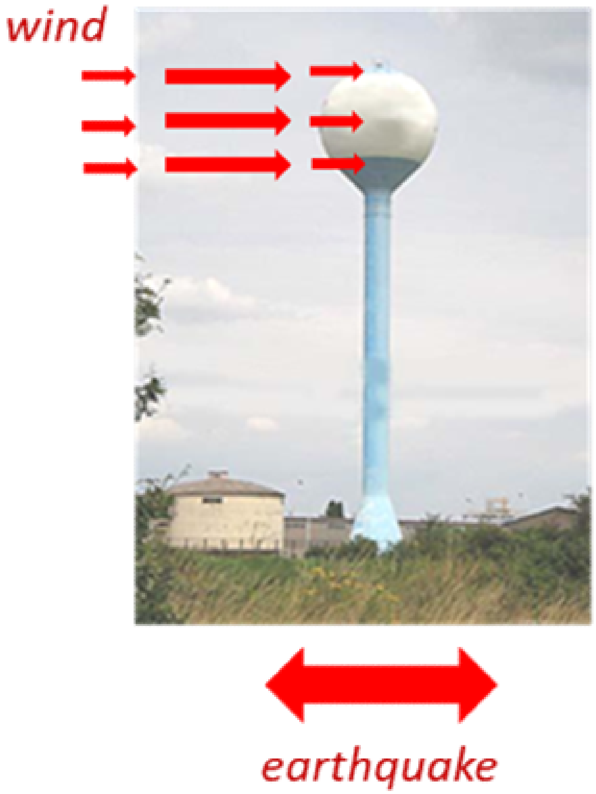
$\rightarrow\ fo = \frac{\omega o}{2\pi} = \frac{20}{2\pi}\ \#\ 3\ Hz$

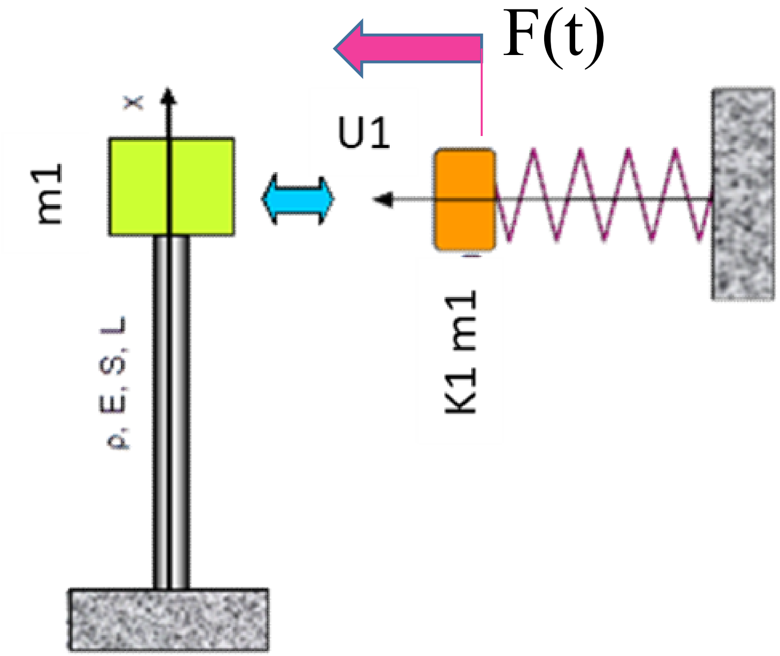
Une cadence de pédalage de 90 tours/min correspond à 180 poussées sur les deux pédales soit 3 poussées par seconde !

- → *Il y a résonance sous forme de POMPAGE particulièrement en montée (cadence et effort) !*
- → *L'amortisseur peut venir diminuer le phénomène mais en dissipant de l'énergie…*

Etude b : Le château d'eau

Vibrations transversales d'un château d'eau industriel.

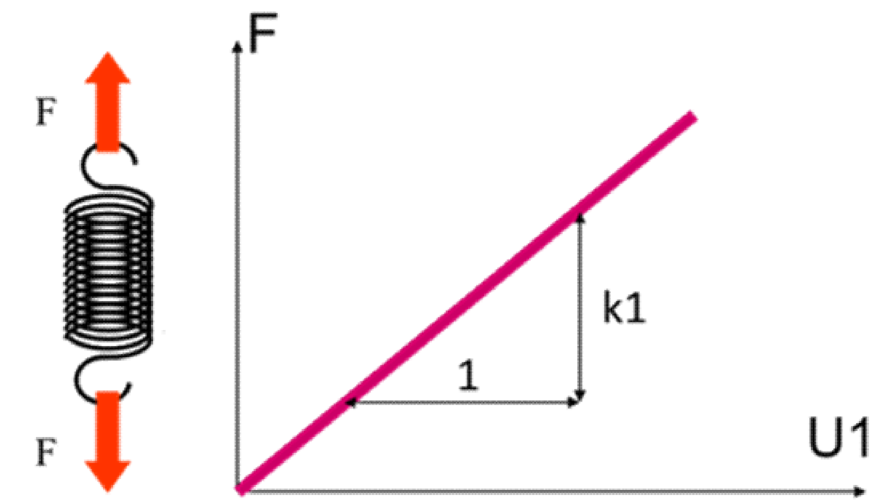


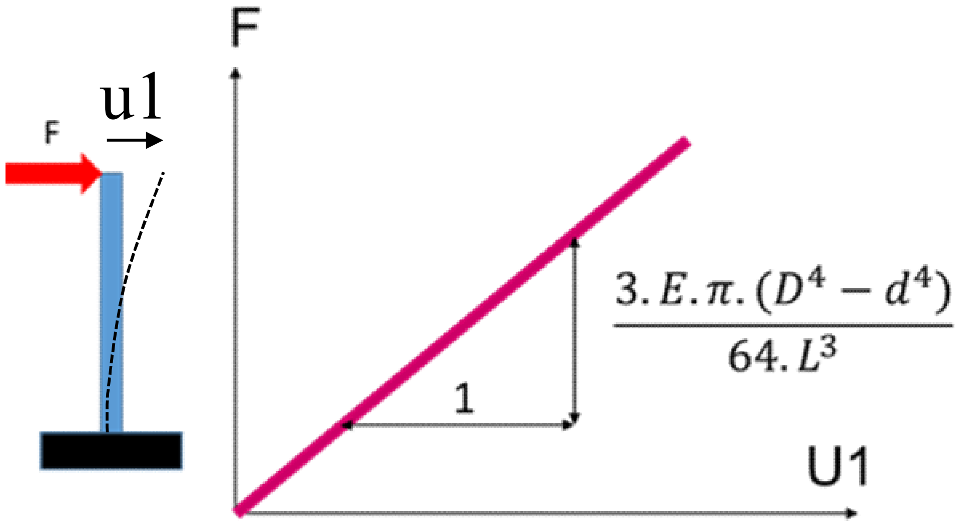


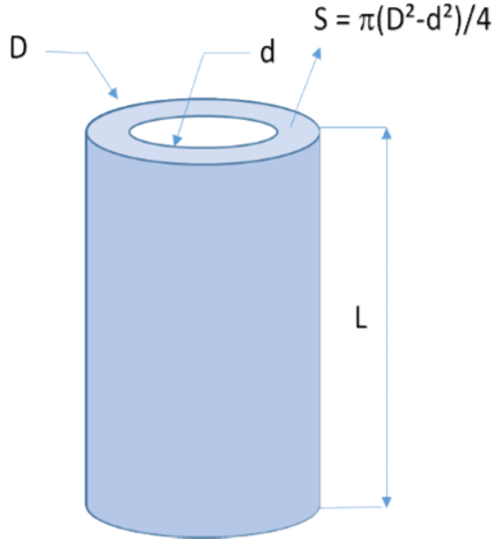
Discrétisation en un système à 1 DDL.

Structure réelles ε *---> 0*
On retire l'amortisseur dans la modélisation

Etude b : Le château d’eau







E = 22 Gpa

D = 4 m

d = 3 m

M_{eau} = $10^{E}6$ kg

L = 35 m

Etude b : Le château d'eau

La raideur du ressort équivalent à la colonne de béton est :

La plage de fréquence des séismes les plus courants est 0,1 < f < 20Hz

→ *Le château d'eau est sensible à ces phénomènes.*

Etude b : Le château d’eau

La raideur du ressort équivalent à la colonne de béton est :

$$K = \frac{3.E.\pi.(D^4 - d^4)}{64.L^3} = \frac{3*22*10E9*\pi*(4^4 - 3^4)}{64*35^3} = 1{,}3*10^E7 \text{ N/M}$$

$$\rightarrow \omega o = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{1{,}3*10^{E7}}{10e6}} \ \# \ 3{,}6 \frac{rad}{s}$$

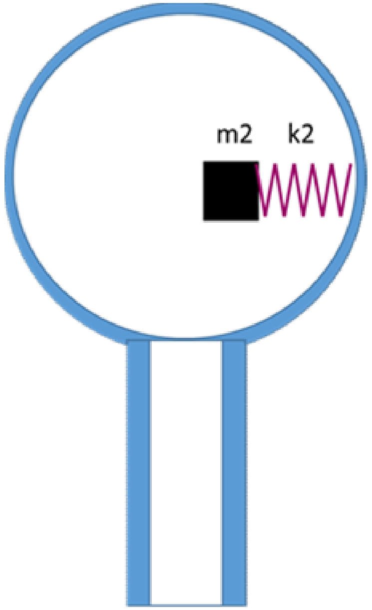
$$\rightarrow fo = \frac{\omega o}{2\pi} = \frac{3{,}6}{2\pi} \ \# \ 0{,}6 \text{ Hz}$$

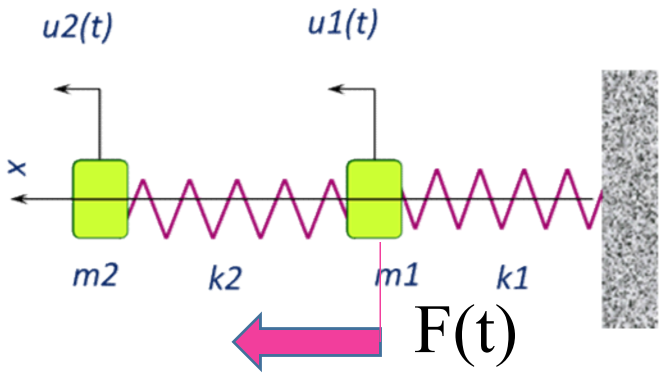
La plage de fréquence des séismes les plus courants est 0,1 < f < 20Hz

→ Le château d’eau est sensible à ces phénomènes.

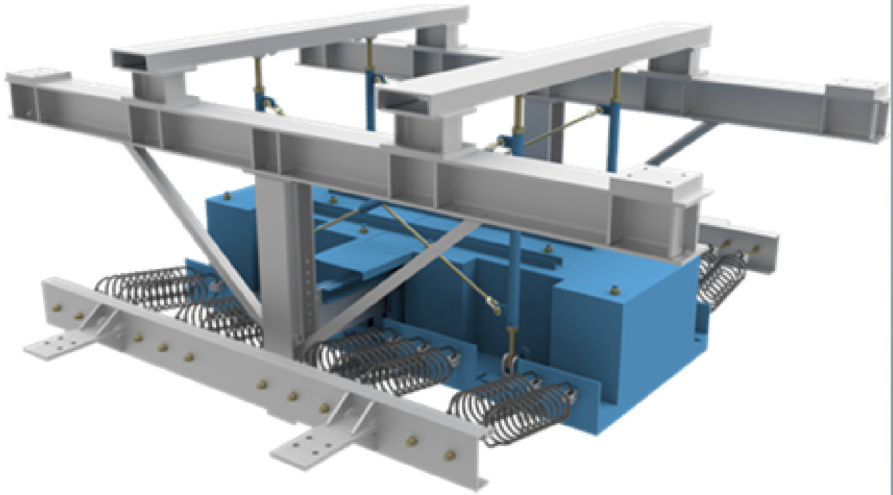
Etude b : L’étouffeur de vibrations

Une solution :
l’étouffeur de vibrations

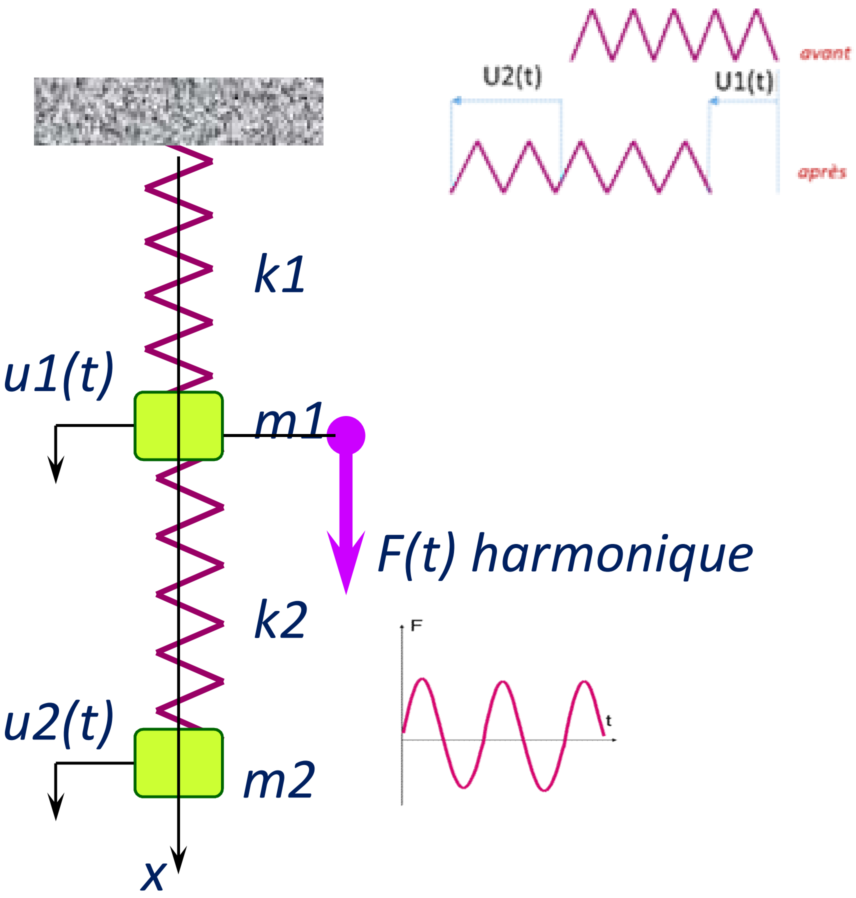




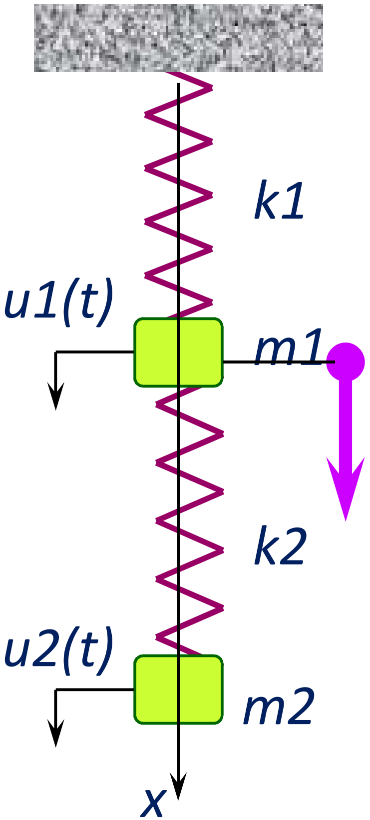
On obtient un système discret à 2 DDL

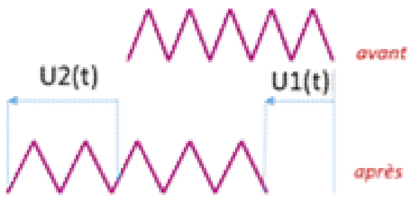


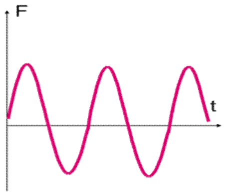
Etude b : Le régime forcé 2DDL



Etude b : Le régime forcé 2DDL







$$\begin{cases} m1.u1''+k1.u1-k2.(u2-u1)=F(t) \\ m2.u2''+k2.(u2-u1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m1.u1''+(k1+k2).u1-k2.u2=F(t) \\ m2.u2''-k2.u1+k2.u2=0 \end{cases}$$

On pose forcément $\begin{cases} u_1(t)=a_1.e^{j.\omega.t} \\ u_2(t)=a_2.e^{j.\omega.t} \end{cases}$

$$\begin{cases} a1=\dfrac{F.(k_2-m_2.\Omega^2)}{(k_1+k_2-m_1.\Omega^2)(k_2-m_2.\Omega^2)-k_2{}^2} \\ a2=\dfrac{k_2.F}{(k_2-m_2.\Omega^2)}.a1 \end{cases}$$

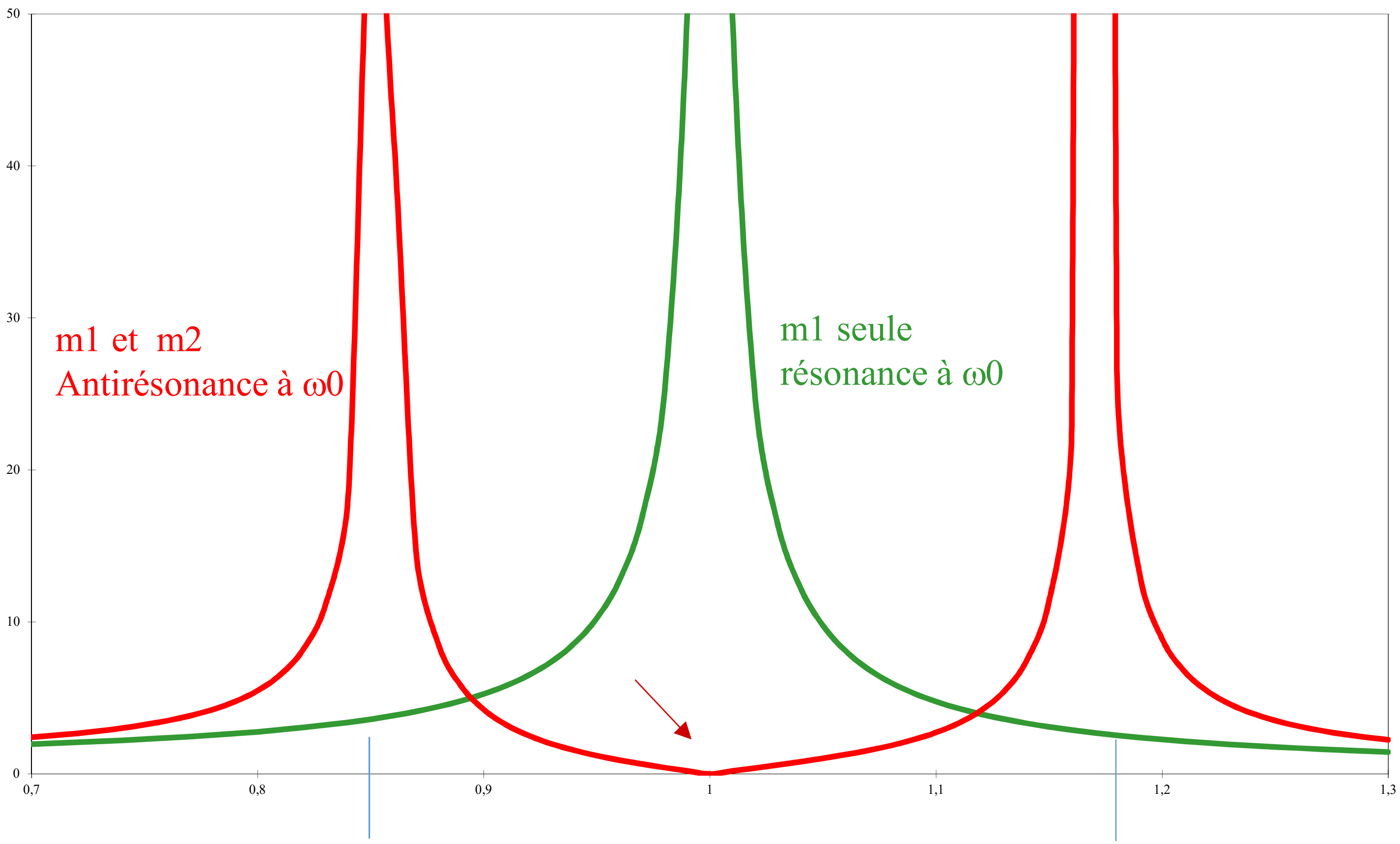
Le dénominateur de a1 est nul pour $\Omega=\omega o1$ ou $\Omega=\omega o2$

$$(j\omega1)^2 \;\; ou \;\; (j\omega2)^2=\frac{-(k1+k2)m2-k2.m1\pm\sqrt{\left[-(k1+k2)m2-k2.m1\right]^2-4m1m2k1k2}}{2m1.m2}$$

Etude b : Principe de l'étouffeur de vibrations

$$a1/a1st = f\ (\Omega/\omega_0)$$

On observe donc 2 RESONANCES qui copient les modes propres du régime libre, d'où l'importance de connaître fréquences et modes propres du système quand on étudie le régime forcé…



$(\Omega = \omega_{01})$ $(\Omega = \omega_0)$ $(\Omega = \omega_{02})$

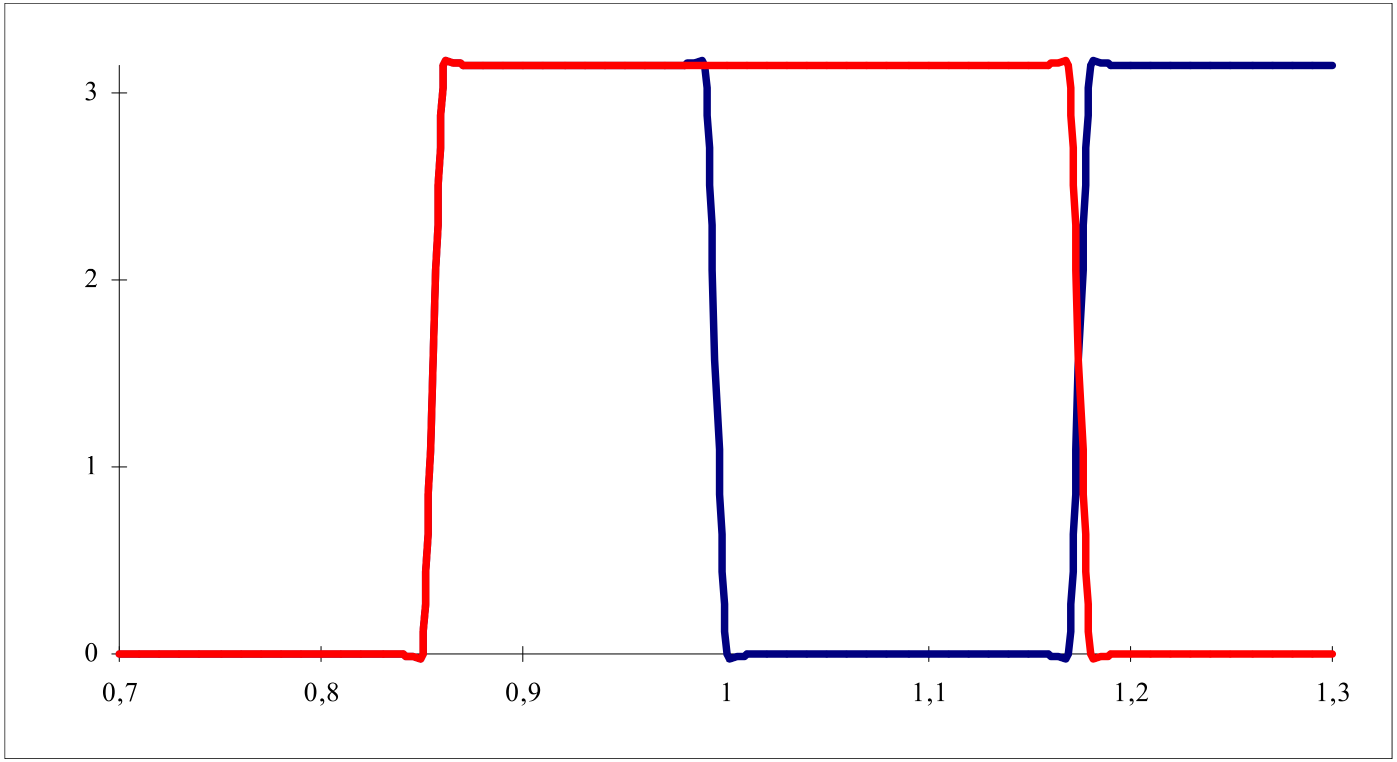
Tracé avec m1 = 10.m2 et k1 = 10.k2

→ *cas de l'étouffeur de vibration*

Etude b : Les phases

φ et ψ

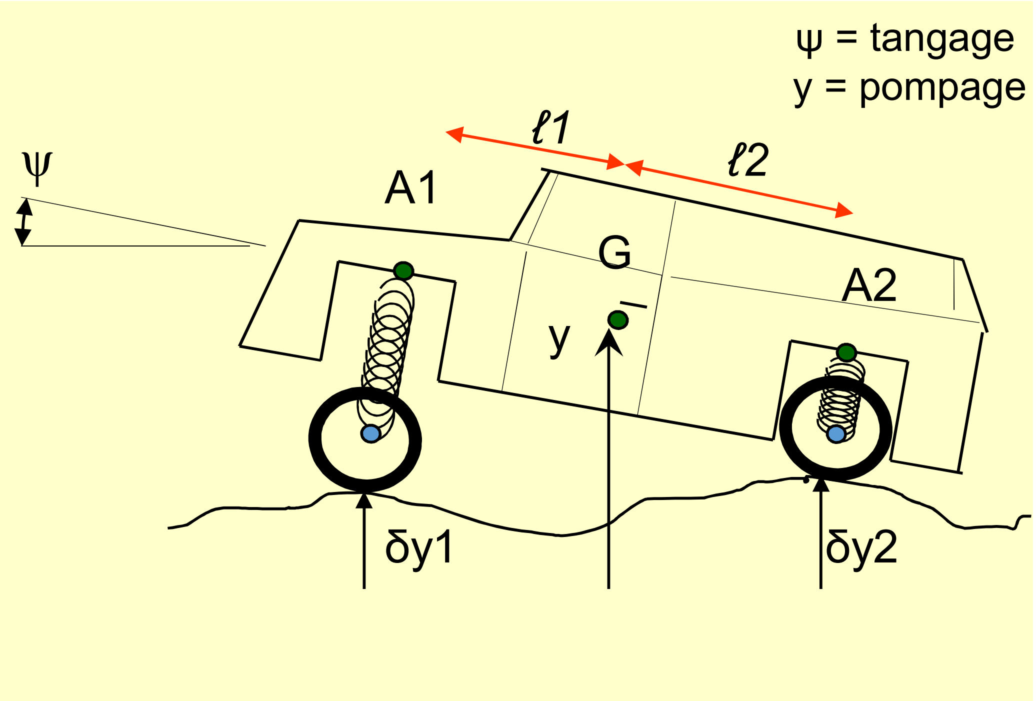
en fonction de (Ω/ω_{01})



Tracé avec m1 = 10.m2 et k1 = 10.k2

→ *cas de l'étouffeur de vibration*

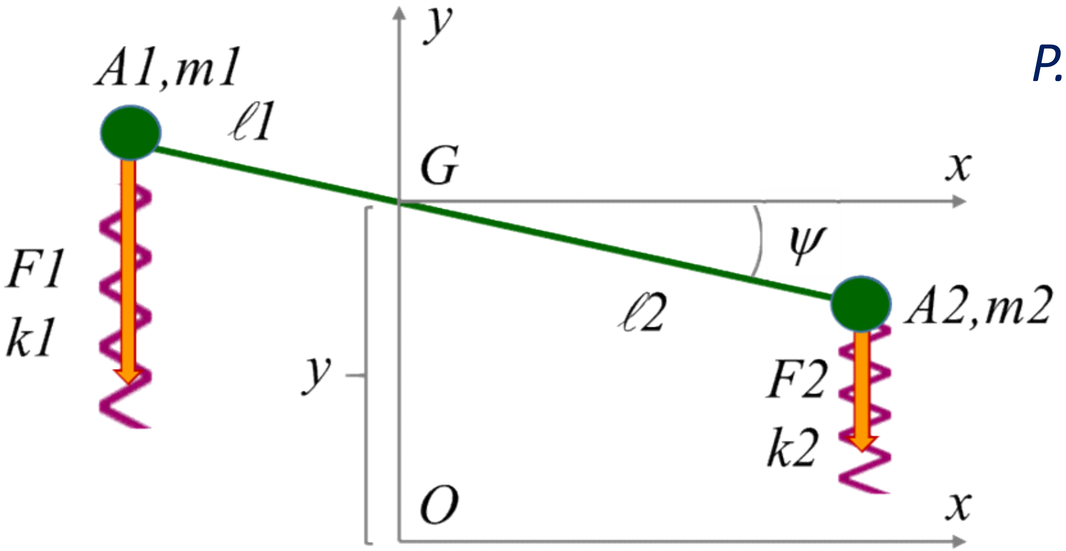
Etude c : La voiture



Condition sur ℓ1 et ℓ2 pour découpler tangage et pompage ?

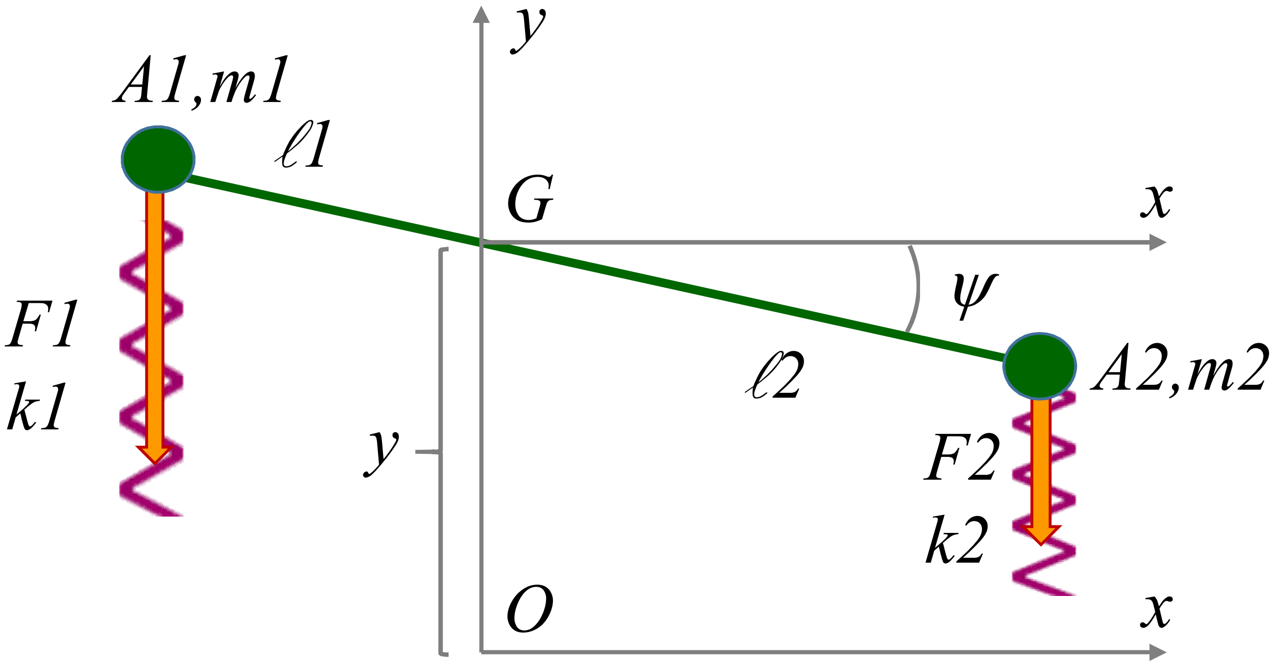
ψ(t) et y(t) indépendants

Etude c : La voiture



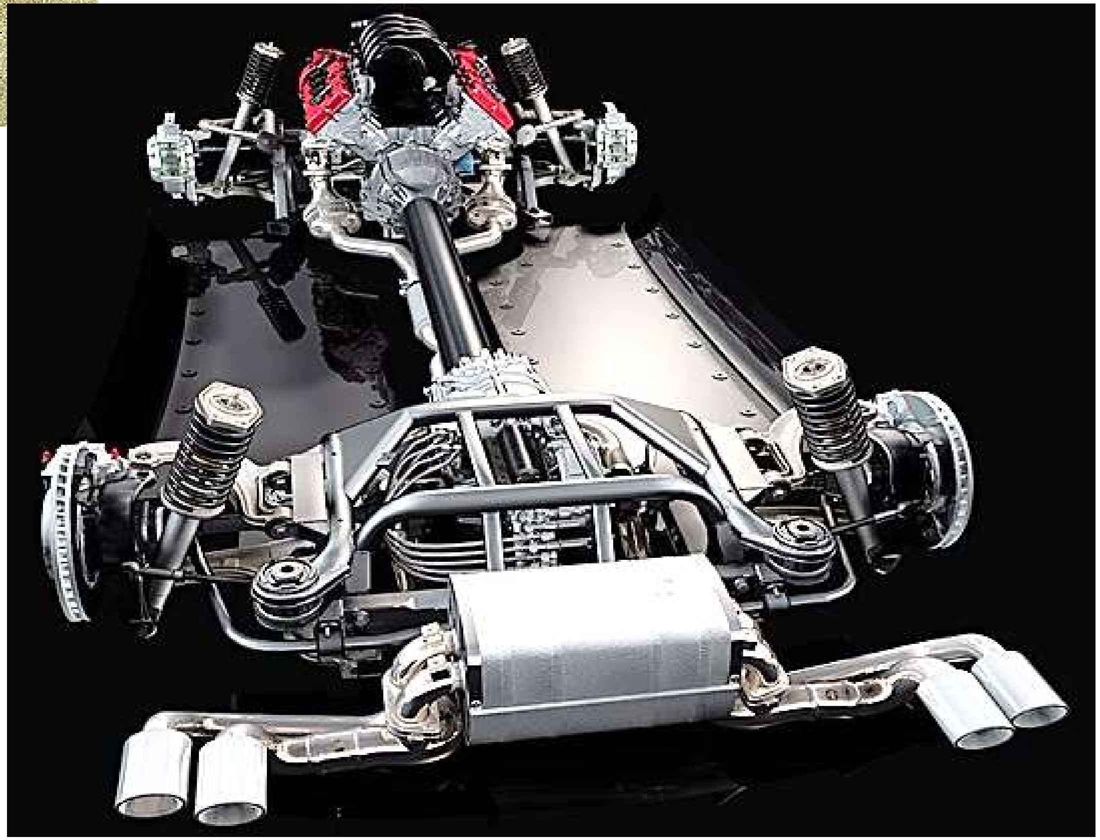
P.F.D. en G, appliqué à l'ensemble A_1A_2 :

Etude c : Découplage



Sur route plate et plane, $y = 0$ et $\psi = 0$.

Etude c : Découplage



Système « transaxle »
Alfa Roméo 8C
Moteur à l'avant
Boîte + pont à l'arrière
---> masse répartie 50% Av. et 50% Ar.
Assurant équilibrage et découplage…