Critère de résistance dit de TRESCA (1814-1885)

Le critère de Tresca pose que la plasticité du matériau commence lorsque la contrainte de cisaillement maximale atteint la moitié de la limite élastique Re. C'est un critère assez conservateur pour un matériau DUCTILE (métaux…), déconseillé pour les matériaux fragiles (verre, béton…).

τmaximum $\leq$ τadmissible

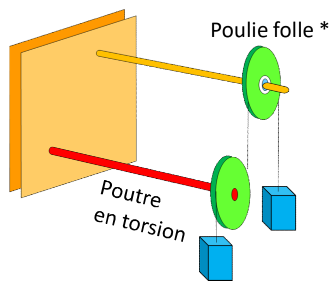
Avec τadmissible $\approx$ 0,5 Re
Re résistance élastique

Résistance Des Matériaux
Dossier 4 – Cas particulier de la torsion

Ce document est une synthèse du cours présenté

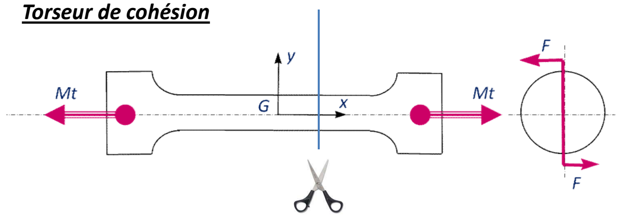
Les arbres de transmissions, les ressorts de traction compression sont très présents dans les systèmes mécaniques et ils sont essentiellement soumis à… …la torsion.

Mise en oeuvre



(*) Une poulie folle est en liaison pivot avec l'arbre sur lequel elle est montée.

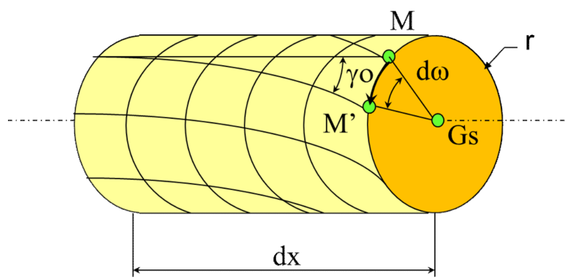
Torseur de cohésion

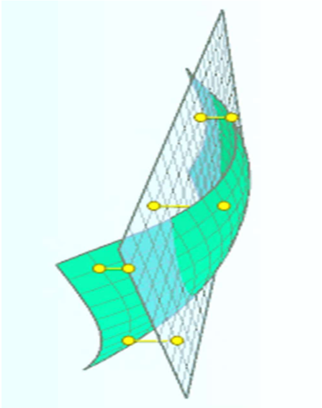


$$T\left(\frac{S+}{S}\right) = \begin{Bmatrix} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{Gs}$$

Déplacements et déformations

On utilise la méthode des grilles. Une grille est gravé sur la poutre. Puis l'essai commence avec l'application de la torsion. On observe alors que la grille se déforme.
La poutre utilisée est CYLINDRIQUE pour éviter les phénomènes de gauchissement de section typiques des sections rectangulaires en torsion…





Gauchissement d'une section rectangulaire

Il résulte de l'observation que :

1/ les sections droites restent droites (perpendiculaires à la ligne moyenne) et tournent axialement en bloc les unes relativement aux autres, soit $\vec{\omega} = \omega\,\vec{x}$
2/ les sections restent planes et ne se gauchissent pas si la poutre est cylindrique
3/ l'allongement d'un tronçon de longueur dx est nul, soit $\frac{dU}{dx} = 0$
4/ les génératrices de la grille prennent la forme d'hélice d'angle γo donc $\frac{d\omega}{dx}$ =constante

$\vec{\varepsilon}(x) = \frac{\overrightarrow{dU(x)}}{dx} + \vec{x} \wedge \vec{\omega} \;= \vec{x} \wedge \omega.\vec{x} = \vec{0}$ La dilatation est nulle.

$$\overline{MM'} \# \widehat{MM'} = r.d\omega$$
$$\overline{MM'} \# \widehat{MM'} = \gamma 0.dx$$
$$\gamma 0.dx = r.d\omega$$

⇨ $\boxed{\gamma o = r.\frac{d\omega}{dx}}$ Déformation angulaire en torsion [%]

Vecteur contrainte

$$\overrightarrow{M\left(\frac{S+}{S-}\right)} = Mt.\vec{x} = \iint \overrightarrow{T(M,\vec{x})} \wedge \overrightarrow{MGs}.ds = \iint \overrightarrow{T(M,\vec{x})} \wedge r.\vec{er}.ds$$

Donc obligatoirement si le résultat du produit vectoriel est sur $\overrightarrow{Gsx}$, $\overrightarrow{T(M,\vec{x})} = \tau.\vec{e\theta}$

En projection : $Mt = \iint \tau.r.ds$

Loi de comportement

$$\tau = G.\gamma o = G.r.\frac{d\omega}{dx}$$

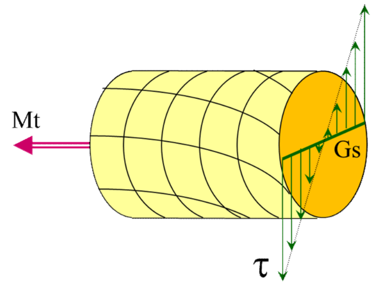
Constant dans la section

Donc $Mt = \iint G.r^2.\frac{d\omega}{dx}.ds = G.\frac{d\omega}{dx}.\underbrace{\iint r^2.ds}$

Noté Io, moment quadratique polaire de la section, sa valeur est fonction de la géométrie de la section (rayon…)

⇨ $\boxed{Mt = G.\frac{d\omega}{dx}.Io}$ Moment de torsion [N.m]

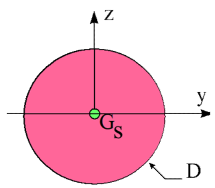
$\frac{d\omega}{dx} = \frac{\gamma o}{r} = \frac{\tau}{G.r}$ ⇨ $\boxed{\tau = \frac{Mt.r}{Io}}$ Contrainte tangentielle de torsion [Pa]

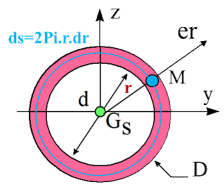


Ainsi le champ de contrainte est tangent à la section et la valeur de la contrainte est proportionnelle au rayon étudié.
On observe que le centre de la section est peu stressé voire même pas du tout sur la ligne moyenne (en Gs).

$d\omega = Mt.\frac{dx}{G.Io}$ ⇨ $\boxed{\omega(L) - \omega(o) = \frac{Mt.L}{G.Io}}$ Rotation entre les extrémités de la poutre [rad]

Moments quadratiques usuels





$Io = \iint r^2.ds$

$= \iint r^2.2\pi r.dr = 2\pi \int_{d/2}^{D/2} r3.dr = 2\pi.[\frac{r^4}{4}]_{d/2}^{D/2}$

$\boxed{Io = \pi.\frac{D^4 - d^4}{32}}$ Moment quadratique polaire dans le cas d'un tube cylindrique [m4]

$\boxed{Io = \pi.\frac{D^4}{32}}$ Moment quadratique polaire dans le cas d'un arbre cylindrique plein [m4]