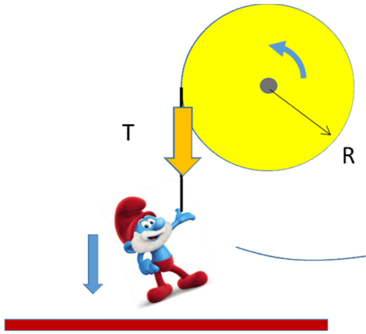
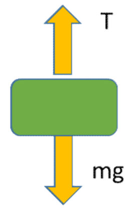
III- Et pour notre grand schtroumpf alors ?





T.R = J.θ''

T – mg = - m.a

V = θ'R → a = θ''R

En remplaçant : m.(g-a) R = J.a/R

Ainsi a = g.mR²/(J + mR²)

On observe que la chute est d'autant plus ralentie que la valeur de J est importante
→ On a fabriqué un parachute dynamique !

Cette accélération est constante donc le mouvement de la masse est un MRUV
X = at²/2 et V = a.t si les conditions initiales sont nulles.
Si le temps de chute est tc sur une hauteur h :
tc² = 2h/a = 2h.(J + mR²)/mgR²
et alors V(tc) = a.tc = $\sqrt{2ah}$ = $\sqrt{2mgR^2h/(J+mR^2)}$

Calculons alors le rayon R du cylindre en acier de longueur R/2 permettant à un schtroumpf de 80 kg de descendre de 10m avec une vitesse finale Vf de 7,2 km/h…

$$Vf^2 = \frac{2mgR^2h}{J+mR^2}$$

$$J = \frac{2mgR^2h}{Vf^2} - mR^2$$

Or J = M.R²/2 = $\rho.\pi.R^2.R/2$.R²/2 = $\frac{1}{4}.\rho.\pi.R^5$

Ainsi : $\frac{1}{4}.\rho.\pi.R^5 = \frac{2mgR^2h}{Vf^2} - mR^2$ soit R = $\sqrt[3]{\left(\frac{2mgh}{Vf^2} - m\right).\frac{4}{\pi\rho}}$

R = $\sqrt[3]{\left(\frac{2.80.10.10}{2^2} - 80\right).\frac{4}{\pi.7800}} = 0{,}68\,m$! Ce résultat doit être vérifiable en appliquant la conservation de l'énergie mécanique au système…

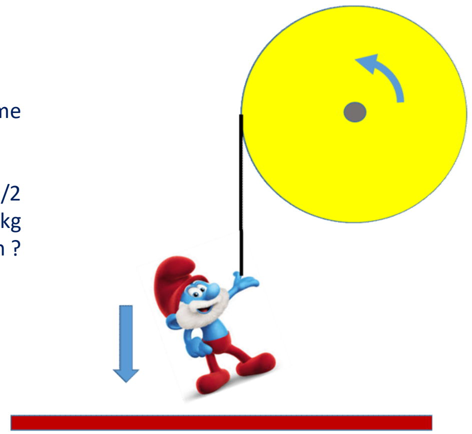
Dossier 9 **Le Mécanologue**

Ce document est une synthèse du cours présenté *www.mecanologue.fr*

Cette étude porte sur un cas particulier de la mécanique du point, celui des systèmes de points constituant des solides en rotation autour d'un axe fixe.

On réalise un parachute dynamique comme dispositif d'évacuation d'urgence…

Quel doit être le rayon R du cylindre d'épaisseur R/2 pour que le grand schtroumpf de masse m = 80 kg touche le sol à V = 2m/s après une chute h de 10 m ?



I - Rappel sur le principe fondamental de la dynamique

Pour un ensemble de points E de centre d'inertie G le PFD s'écrit :

Équilibre dynamique des forces

$$\boxed{\vec{F}_{(\overline{E}/E)} = \underbrace{m_E.\vec{a}_{G/R_o}}_{\text{Quantité d'accélération (force d'inertie au signe près)}}}$$

Centre d'inertie

Repère galiléen ou repère absolu (absolument fixe)

E ensemble de points matériels

Équilibre dynamique des moments

$$\boxed{\vec{M}_{(A,\overline{E}/E)} = \underbrace{m_E.\vec{a}_{G/R_o} \wedge \overrightarrow{GA}}_{\text{Moment de la quantité d'accélération (ou moment force d'inertie au signe près)}}}$$

Point d'observation Ici A

$$\overrightarrow{\delta(A,\frac{G}{Ro})}$$

Moment dynamique en A de G/Ro DELTA

2 équations vectorielles → 6 équations scalaires

On doit comprendre que le cylindre est constitué d'une infinité de points.
Chacun contribue à sa manière et de façon différente quand le rayon est différent.
Le moment dynamique est donc la somme de chaque moment élémentaire développé par chaque point de masse dm infiniment petite (la masse mE divisée par le « nombre » infini de points).

II - Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) solide S en rotation autour d'un axe fixe $(O,\vec{Z})$:

$$\underbrace{\overrightarrow{\delta(O,\tfrac{E}{R})} = \int_E \underbrace{\overrightarrow{a(\tfrac{M}{R})} \wedge \overrightarrow{MO}.\mathrm{dm}}_{\text{Moment dynamique de M}}}_{\text{Moment dynamique total}}$$

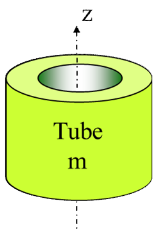
dm → Masse de M

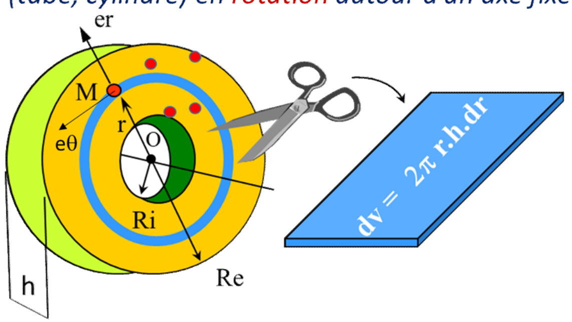
$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{a(\tfrac{M}{R})} &= -\theta'^2.r.\vec{er} + r.\theta''.\vec{e\theta}\\ \overrightarrow{MO} &= -r.\vec{er}\end{aligned}\right\} \quad \overrightarrow{a(\tfrac{M}{R})} \wedge \overrightarrow{MO} = r^2.\theta''.\vec{z}$$

$$\overrightarrow{\delta(O,\tfrac{E}{R})} = \int_E r^2.\theta''.dm.\vec{z} = \theta''.\underbrace{\int_E r^2.dm}_{\text{Moment d'inertie autour de l'axe (Oz) noté Jz}}.\vec{z}$$

θ'' : Identique en tout point si E est un solide….

Cas particulier d'un solide (tube, cylindre) en rotation autour d'un axe fixe.





dm = ρ.dv
Et dv = 2.π.r.h.dr si on imagine dérouler un tour d'une bande fine d'épaisseur dr enroulée sur un cylindre de rayon r.

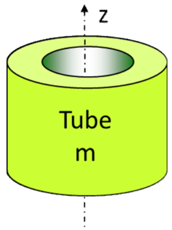
$$\overrightarrow{\delta(O,\tfrac{E}{R})} = \theta''.\int_{Ri}^{Re} \rho h.2\pi.r^3.dr.\vec{z}$$

Primitive r4/4

La bande est enroulée de Ri à Re

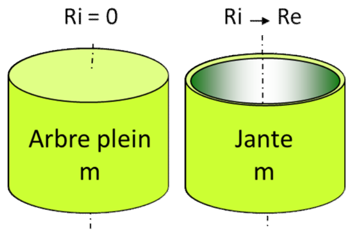
$$\overrightarrow{\delta(O,\tfrac{E}{R})} = 2\pi\rho.\theta''.\left[\frac{Re4 - Ri4}{4}\right]\vec{z} = \overrightarrow{\delta(O,\tfrac{E}{R})} = 2\pi\rho.\theta''.\left[\frac{(Re^2-Ri^2).(Re^2+Ri^2)}{4}\right]\vec{z}$$

Or $\rho = m/v = m/\pi h.(Re^2 - Ri^2)$



Re = rayon extérieur
Ri = rayon intérieur

$$\boxed{Jz = m_{(tube)}.\frac{(Re^2 + Ri^2)}{2}}$$



Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)
solide S en rotation autour d'un axe fixe $(O,\vec{Z})$:

Équilibre dynamique des forces

$$\boxed{\vec{F}_{(\bar{S}/S)} = \underbrace{m_S.\vec{a}_{G/R_0}}_{\text{Quantité d'accélération (force d'inertie au signe près)}}}$$

Centre d'inertie

Repère galiléen ou repère absolu (absolument fixe)

Équilibre dynamique des moments

$$\boxed{\vec{M}_{(A,\bar{S}/S)} = \underbrace{Jz.\theta''.\vec{Z}}_{\text{Moment de la quantité d'accélération autour de } \vec{Az} \text{ (ou moment force d'inertie au signe près)}}}$$

Point d'observation Ici A

2 équations vectorielles → 6 équations scalaires