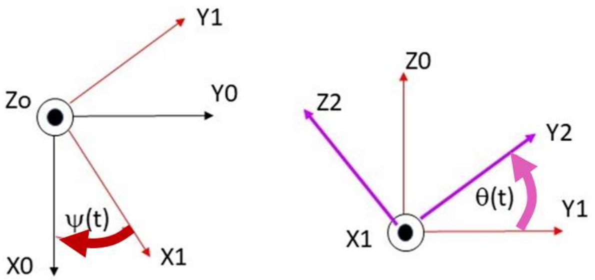
Revenons au trike…



$$\overrightarrow{V(P/R0)} = \left\{\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right\}_{R0} = \left\{\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right\}_{R0} + \left\{\frac{d\overrightarrow{G}}{dt}\right\}_{R0}$$

On applique deux fois la relation de BOUR en prenant soin de choisir la base de dérivation pour que le résultat soit nul.

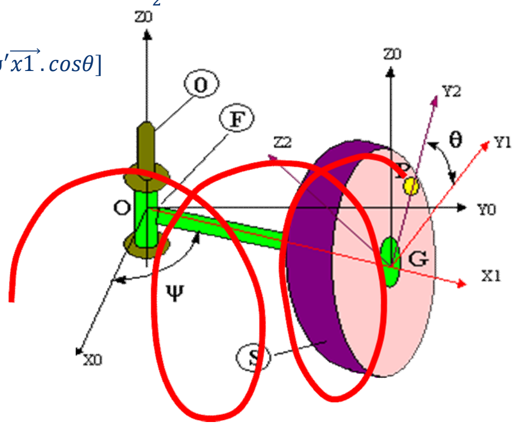
$$\overrightarrow{V(P/R0)} = \left\{\frac{d\overrightarrow{O}}{dt}\right\}_{R0} = \left\{\frac{l.d\overrightarrow{x1}}{dt}\right\}_{R0} + \left\{\frac{r.d\overrightarrow{y2}}{dt}\right\}_{R0}$$

$$\overrightarrow{V(P/R0)} = \left\{\frac{l.d\overrightarrow{x1}}{dt}\right\}_{R0} + \left\{\frac{r.d\overrightarrow{y2}}{dt}\right\}_{R0}$$

$$\overrightarrow{V(P/R0)} = \text{l.}\left[\underbrace{\left\{\frac{d\overrightarrow{x1}}{dt}\right\}_{R1}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega(\tfrac{R1}{Ro})} \wedge \overrightarrow{x1}\right] + r.\left[\underbrace{\left\{\frac{d\overrightarrow{y2}}{dt}\right\}_{R2}}_{\vec{0}} + \overbrace{\overrightarrow{\Omega(\tfrac{R2}{Ro})}}^{+\overrightarrow{\Omega(\frac{R2}{R1})} + \overrightarrow{\Omega(\frac{R1}{Ro})}} \wedge \overrightarrow{y2}\right]$$

$$\overrightarrow{V(P/R0)} = \text{-l.}\underbrace{\psi'\overrightarrow{zo} \wedge \overrightarrow{x1}}_{\overrightarrow{y1}} + \text{r}\overbrace{[\theta'\overrightarrow{x1}}^{\overrightarrow{z2}} \underbrace{-\psi'\overrightarrow{zo}] \wedge \overrightarrow{y2}]}_{+\overrightarrow{x1}.\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}$$

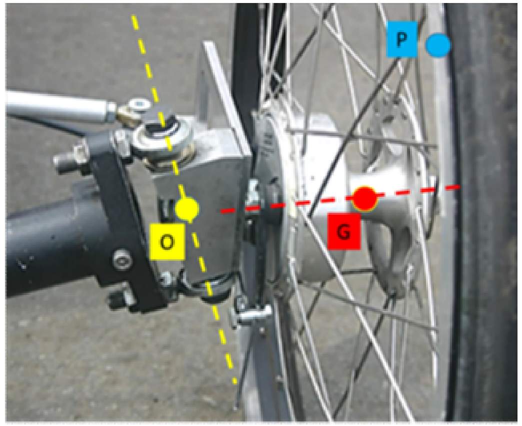
$$\overrightarrow{V(P/R0)} = \text{-l.}\psi'\overrightarrow{y1} + \text{r}[\theta'\overrightarrow{z2} + \psi'\overrightarrow{x1}.cos\theta]$$

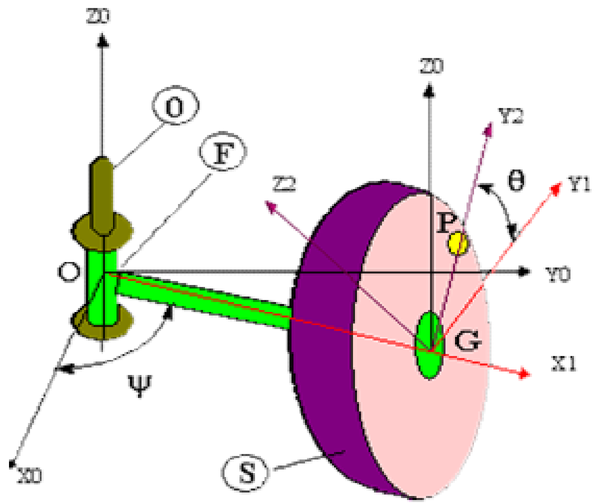


Afin d'optimiser la conception d'un trike, on souhaite déterminer la vitesse d'un point de la roue relativement au châssis du trike.

Le mouvement de P est issu de la composition de deux rotations.

- *La rotation autour de l'axe de la fusée qui permet de diriger le trike.*
- *La rotation autour de l'axe de la roue qui permet de le faire avancer…*





Relation de BOUR

Elle permet de transformer la dérivée temporelle du vecteur en produit vectoriel sans projeter celui-ci dans la base fixe → elle offre un gros gain de temps quand on sait l'utiliser...

Produit vectoriel entre deux vecteurs

$$\left\{\frac{d\vec{u}}{dt}\right\}_{R0} = \left\{\frac{d\vec{u}}{dt}\right\}_{R1} + \overrightarrow{\Omega\left(\frac{R1}{R0}\right)} \wedge \vec{u}$$

On s'arrangera pour que ce soit =0

Vecteur vitesse Rotation de R1 vu depuis R0

vectoriel

Ici c'est la rotation terrestre θ'

Calcul mental du produit vectoriel de deux vecteurs

Poser le calcul vectoriel de façon traditionnelle n'est pas souvent possible car pour cela les deux vecteurs doivent être exprimés dans la même base ce qui revient à nouveau à les projeter. La méthode présentée ici permet de s'affranchir de cette précaution, elle peut aussi être très rapide et se faire de tête !

Produit vectoriel : le résultat attendu est un VECTEUR
→ 1 direction → 2 sens → 3 intensité

1 - Comment trouver la direction du produit vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$?

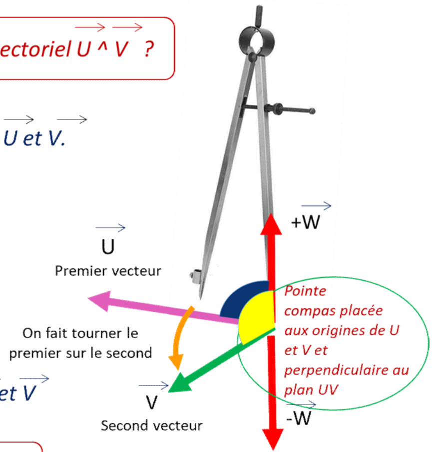
Placer un compas à l'origine des deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

Faire tourner le compas de $\vec{U}$ vers $\vec{V}$.

La pointe du compas c'est l'axe de la rotation
Et c'est aussi la direction du résultat

→ ici donc c'est +/- $\vec{W}$.

→ $\vec{W}$ est obligatoirement perpendiculaire à $\vec{U}$ et $\vec{V}$



2 - Comment calculer le signe du produit vectoriel ?

Rotation compas = rotation bouchon

Z (ascendant ou sortant)

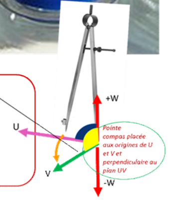
Dévisse
Sens sortant

Z

Visse
Sens rentrant

On utilise la méthode du bouchon et on compare son déplacement avec le vecteur de la base (ici Z) :

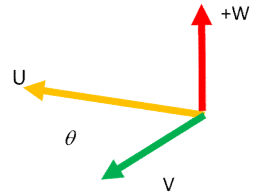
- *sens déplacement identique = +*
- *sens déplacement opposé = -*



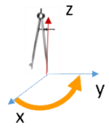
Ici le sens est sortant comme Z.
→ Signe +W

3 - Comment calculer la norme du produit vectoriel ?

$$||\vec{W}|| = ||\vec{U}||.\,||\vec{V}||.\,\sin\theta$$



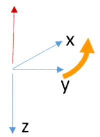
Exemples :



$\vec{X} \wedge \vec{Y} = \vec{Z}$

$||Z|| = ||X||.\,||Y||.\,\sin\pi/2 = 1$

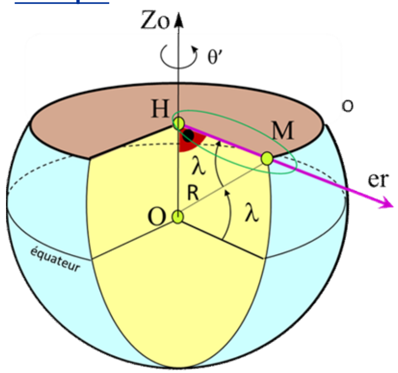
Le troisième vecteur dans une base directe est issu du produit vectoriel des deux premiers.



$\vec{Y} \wedge \vec{X} = -\vec{Z}$

Attention dans les deux calculs la rotation est trigo donc sortante mais dans le premier cas le résultat est positif et dans le second le résultat est négatif.
Il faut toujours comparer le sens avec le vecteur de la base qui dirige l'axe pour trouver le signe.

Exemple

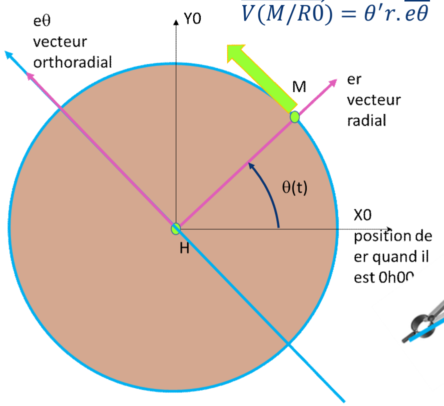


Vitesse en trajectoire circulaire ?

$$\overrightarrow{V(M/R0)} = \left\{\frac{d\overrightarrow{HM}}{dt}\right\}_{R0}$$

$$\left\{\frac{d\overrightarrow{HM}}{dt}\right\}_{R0} = \left\{\frac{d\overrightarrow{HM}}{dt}\right\}_{R1} + \overrightarrow{\Omega\left(\frac{R1}{R0}\right)} \wedge \overrightarrow{HM}$$

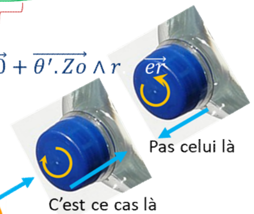
La Terre (H, er, eθ, Zo)

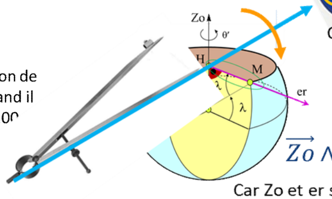


$$\overrightarrow{V(M/R0)} = \theta'r.\overrightarrow{e\theta}$$

$$\left\{\frac{d\overrightarrow{HM}}{dt}\right\}_{R0} = \vec{0} + \overrightarrow{\theta'.Zo} \wedge r\,\overrightarrow{er}$$

$$\overrightarrow{Zo} \wedge \overrightarrow{er} =$$





$$\overrightarrow{Zo} \wedge \overrightarrow{er} = \overrightarrow{e\theta}.\sin\pi/2$$

Car Zo et er sont perpendiculaires

$$\overrightarrow{V(M/R0)} = \theta'r.\overrightarrow{e\theta}$$