U = $\sqrt{L}$
U² = L

$$0 = -c.t2 + c.\sqrt{\frac{2}{g}}.U + U^2 \qquad au^2+bu+c = 0$$

$$\Delta = c^2.\frac{2}{g} - 4(-c.t2) = c^2.\frac{2}{g} + 4.c.t2$$

$$U1 = \frac{-c.\sqrt{\frac{2}{g}} + \sqrt{c^2.\frac{2}{g} + 4.c.t2}}{2} \qquad U2 = \frac{-c.\sqrt{\frac{2}{g}} - \sqrt{c^2.\frac{2}{g}+4.c.t2}}{2} < 0 \text{ donc impossible}$$

Si t2 = 1 seconde

$$U1 = \frac{-340.\sqrt{\frac{2}{10}} + \sqrt{340^2.\frac{2}{10}+4.340.1}}{2} = 2{,}20$$

L = U² = 2,2² = 4,84 m

Hauteur d'eau qui reste dans le puits c'est H-L = 70 - 4,84 = 65,16 mètres

Une autre relation bien utile :

$$x(t) = a.t^2/2 + Vo.t + Xo \qquad \text{et} \qquad V(t) = a.t + V0$$

Ainsi $t = \frac{V(t)-Vo}{a}$

$$x(t) = \frac{a}{2}.\left[\frac{V(t)-Vo}{a}\right]^2 + Vo.\frac{V(t)-Vo}{a} + Xo$$

$$\Longleftrightarrow \quad x(t) = \frac{a}{2}.\left[\frac{V^2(t)-2.V(t).Vo+V^2}{a^2}\right] + Vo.\frac{V(t)-Vo}{a} + Xo = \left[\frac{V^2(t)-V^2}{2a}\right] + Xo$$

Enfin la relation bien utile est :

$$\boxed{V^2(t) - Vo^2 = 2a.[x(t) - Xo]}$$

Exemple :

Pour atterrir, un avion se présente en bout de piste à la vitesse Vo égale à 300 km/h.La longueur L de la piste d'atterrissage est égale à 1200 m.La décélération est supposée uniforme. Quelle est la durée de l'atterrissage ?

Comme on a une décélération uniforme on peut utiliser les relations précédentes. Et quand t = tf on a V(tf) = Vf = 0

$$V^2(t) - Vo^2 = 2a.[x(t) - Xo] \rightarrow 0 - Vo^2 = 2a.\overbrace{[x(tf) - Xo]}^{\text{L longueur piste}} \qquad \text{donc } -\frac{Vo^2}{2L} = a$$

$$x(t) = a.t^2/2 + Vo.t + Xo \rightarrow x(tf) = -\frac{Vo^2}{2L}.tf^2/2 + Vo.tf + Xo$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\frac{Vo^2}{2L}.tf^2/2 + Vo.tf + \overbrace{Xo\text{-}Xf}^{-L} = 0$$

Soit $\Delta = Vo^2 - -4\frac{Vo^2}{4L}.(-L) = 0$ $\qquad tf1 = \frac{-Vo + \sqrt{0^2}}{2.[-\frac{Vo^2}{4L}]}$ $\qquad tf2 = \frac{-Vo - \sqrt{0^2}}{2.[-\frac{Vo^2}{4L}]}$

$\rightarrow tf1 = tf2 = \frac{2L}{Vo}$

Attention Vo = 300 km/h = 300000/3600 = 83,3 m/s $\qquad tf = \frac{2.1200.}{83,3}$ = 28,8 secondes...

1 – Point en translation

Le Mécanologue

Ce document est une synthèse du cours présenté *www.mecanologue.fr*

Question de profondeur

Problème:

On souhaite déterminer le niveau d'eau dans un puits dont on sait que la profondeur H à vide est égale à 70 mètres.
Pour ceci, on ne dispose que d'un caillou et d'un téléphone portable…

Quelques définitions :

Le mot cinématique est issu du grec KINEMA, signifiant le mouvement.
Le mécanicien est un observateur, pour bien observer il a besoin :

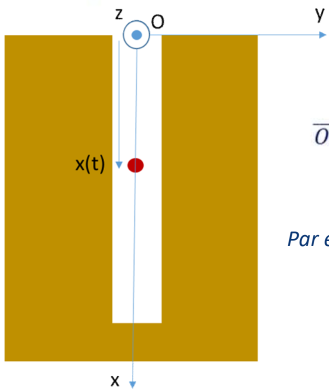
- *D'axes de références pour orienter les directions des mouvements observés (une BASE des espaces),*
- *D'une horloge pour les situer dans le temps (une BASE des temps).*

constitue le référentiel ESPACE TEMPS $(R) \quad (\vec{x},\vec{y},\vec{z},t)$

On observe le mouvement d'un objet aux dimensions réduites assimilable à un point.
Or l'observateur, quelque soit le lieu, possède la même horloge (le même t…).
On simplifie alors et on passe du référentiel au repère R (O ; $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$*)*
Le point O qui est ajouté est l'origine du repère : O, c'est souvent l'observateur, c'est nous !

Vecteur position de M dans R :

La position de M dans R correspond au vecteur $\overrightarrow{OM}$.
Origine de R   Point observé



$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{vmatrix} \qquad \text{équation paramétrique, de paramètre t.}$$

$$\overrightarrow{OM} = x(t).\vec{x} + y(t).\vec{y} + z(t).\vec{z}$$

Par exemple si on jette le caillou dans le puits sa position peut être dans R…

$$\overrightarrow{OM} = \begin{matrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \qquad \overrightarrow{OM} = x(t).\vec{x} + 0.\vec{y} + 0.\vec{z}$$

Vecteur vitesse de M dans R :

C'est la dérivée temporelle du vecteur position.

Dans l'étude des mouvements composés, on parlera de $\underbrace{\text{trajectoires absolues}}_{\text{observateur fixe}}$ et de $\underbrace{\text{trajectoires relatives}}_{\text{observateur éventuellement en mouvement}}$.

⇨ Nécessité de toujours bien préciser où est l'observateur.

$$\boxed{\overrightarrow{V(M/R)} = \left\{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\}_R \quad [m/s]}$$

En effet selon le repère de dérivation choisi (c'est-à-dire le lieu d'observation choisi), le résultat de la dérivée est différent.

Exemple :

- *R est le train, la vitesse du passager assis est nulle relativement au train.*
- *R est le passage à niveau, la vitesse du passager assis n'est pas nulle relativement au passage à niveau…*

Par exemple si on jette le caillou dans le puits sa vitesse peut être dans R…

$$\overrightarrow{V(M/R)} = \begin{matrix} x'(t) \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Ou dx/dt

Ou encore $\dot{x}$

$$\overrightarrow{V(M/R)} = x'(t).\vec{x} + 0.\vec{y} + 0.\vec{z}$$

Vecteur accélération de M dans R:

C'est la dérivée seconde de la position.

$$\boxed{\overrightarrow{a(M/R)} = \left\{\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right\}_R}$$

[m/s²]

C'est donc la dérivée de la vitesse.

$$\boxed{\overrightarrow{a(M/R)} = \left\{\frac{d\overrightarrow{V(M/R)}}{dt}\right\}_R}$$

Chaque seconde la vitesse augmente de « a m/s »
Ainsi si l'accélération est égale à 9,81 m/s², chaque seconde la vitesse augmente de 9,81 m/s.

Par exemple si on jette le caillou dans le puits l'accélération peut être dans R…

$$\overrightarrow{a(M/R)} = \begin{matrix} x''(t) \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Ou d²x/dt²

Ou encore $\ddot{x}$

$$\overrightarrow{a(M/R)} = x''(t).\vec{x} + 0.\vec{y} + 0.\vec{z}$$

Un cas particulier de mouvement simple :

L'accélération du caillou lâché dans le puits est égale à l'accélération de la pesanteur liée à notre planète la Terre. A sa surface elle est constante en intensité et en direction.
On la note g = 9,81 m/s² au niveau de la mer.

$$\overrightarrow{a(M/R)} = \begin{matrix} g \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\overrightarrow{a(M/R)} = g.\vec{x}$$

Il est alors possible d'exprimer vitesse et position en effectuant le chemin « inverse » de la dérivation :
→ par intégration.
Le vecteur x fait partie du repère d'observation, il est fixe (ou constant si on préfère) par rapport à l'observateur qui intègre.

$$\overrightarrow{v(M/R)} = g.t.\vec{x} + \overrightarrow{K1}$$

$$\overrightarrow{OM} = g.t^2/2.\vec{x} + \overrightarrow{K1}.t + \overrightarrow{K2}$$

Les vecteurs constants $\overrightarrow{K1}$ et $\overrightarrow{K2}$ sont déterminés par les conditions initiales.

Si par exemple à t = 0 :

$$\overrightarrow{v(M/R)} = Vo.\vec{x} \quad = g.0.\vec{x} + \overrightarrow{K1}$$

$$\overrightarrow{OM} = Xo.\vec{x} \quad = g.0^2/2.\vec{x} + \overrightarrow{K1}.0 + \overrightarrow{K2}$$

Alors : $\overrightarrow{K1} = Vo.\vec{x}$

$\overrightarrow{K2} = Xo.\vec{x}$

Enfin la trajectoire de M dans R est décrite par le vecteur position :

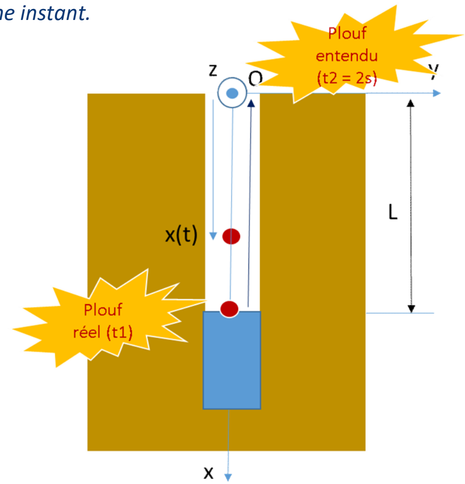
$$\overrightarrow{OM} = g.t^2/2.\vec{x} + Vo.t.\vec{x} + Xo.\vec{x}$$

Plus généralement, l'équation qui régit un Mouvement Rectiligne Uniformément Varié sur O $\vec{x}$ est :

$$\boxed{x(t) = a.t^2/2 + Vo.t + Xo}$$

Alors, quelle est donc la hauteur d'eau dans ce puits ?

On lâche le caillou dans le puits sans vitesse initiale, son mouvement est un MRUV (avec Vo = 0 et Xo = 0) d'accélération g.
On déclenche le chronomètre de notre téléphone au même instant.



Trajectoire 1 : le caillou fatalement rencontre la surface de l'eau : PLOUF à l'instant t1.

Trajectoire 2 : le son, ce PLOUF quoi, remonte à célérité constante connue pour être égale à 340 m/s. On l'entend seulement à l'instant t2.

En décrivant les deux trajectoires, on peut connaître la longueur du trajet du caillou et en déduire la hauteur d'eau dans le puits…

Entre t = 0 et t = t1 → MRUV avec Xo = 0 et Vo = 0

$$x1(t) = g.t^2/2$$

Entre t = t1 et t = t2 → MRU Vo = c vers le haut (axe vers le bas)

$$x2(t) = -c.(t - t1) + L$$

Attention à l'origine des temps,
le son ne remonte qu'à partir de t1

$$L = g.t1^2/2$$

t = t2 l'abscisse de
l'onde sonore est nulle

$$0 = -c.(t2 - t1) + L$$

$$2L/g = t1^2$$

$$0 = -c.(t2 - \sqrt{2L/g}) + L$$