Etude n°3

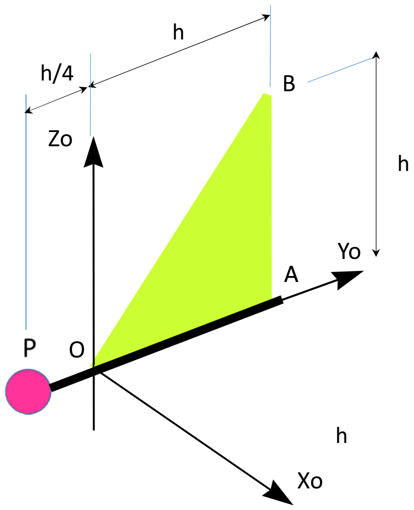
Cette étude porte sur le centre des masses, la matrice d'inertie et le moment cinétique d'un solide .

Cahier des charges :

Concevoir un radar dont le châssis est parfaitement équilibré statiquement et dynamiquement

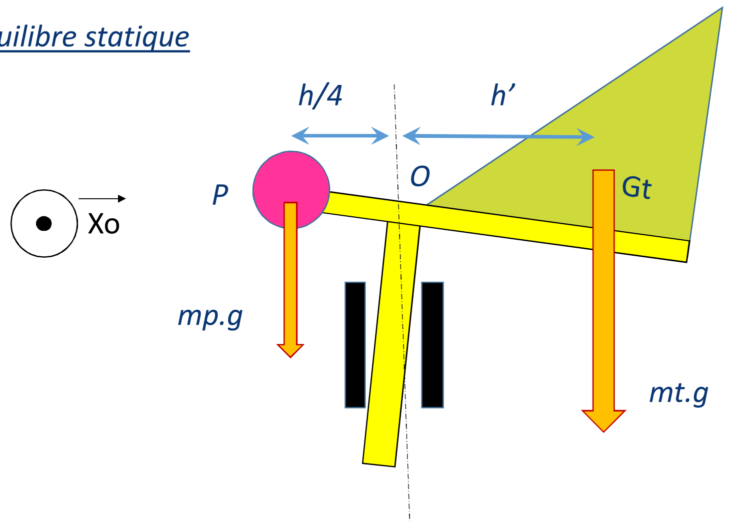
Etude n°3

Paramétrage 1



Etude n°3

Déséquilibre statique



Etude n°3

Centre d'inertie (ou centre des masses)

On attribue désormais une quantité de matière au point courant M élément du solide S.

La mesure de la matière contenue est la masse.

On passe ainsi de la cinématique du solide à la cinétique du solide…

Hypothèse :

∀M et N∈S, ∀t1 et t2 : $m(S,t1) = m(S,t2)$

→ La masse est dite « conservative ».

Etude n°3

En mécanique du point :
E ensemble fini de points Mi

$$\sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{GM_i}.m_i = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{GM_1}.m_1 + \overrightarrow{GM_2}.m_2 = \vec{0}$$

En mécanique du solide :
S contient une infinité de points M

$$\sum \quad \rightarrow \int_S$$

$$En\ fait \iiint$$

$$dm = \rho \underbrace{dv}_{\text{Maths}} \quad dx\ dy\ dz$$

<u>*Mais en fait on peut choisir « dv » à sa guise, en fonction de la forme étudiée.*</u>

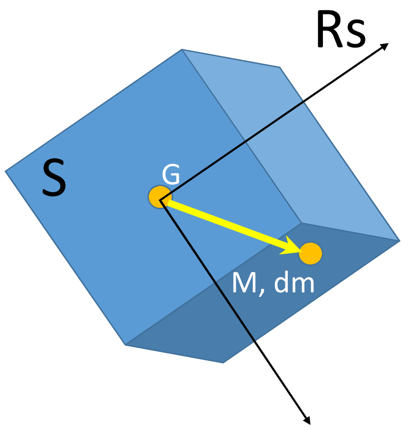
61

Etude n°3

G est centre d'inertie de S si et seulement si :

$$\int_S \overrightarrow{GM}.dm = \vec{0}$$

Position de M relativement à G dans Rs, repère lié au solide S.



<u>Propriétés de G</u> :

- *G est unique*
- *G ∈ axes de symétrie éventuels de S*
- *G n'est pas un point matériel de S (ex : un tube, G est sur l'axe)*

62

Etude n°3

En pratique on désire souvent connaître $\vec{a}_{G\in S/R_0}$ *pour écrire le PFD :* $\vec{a}_{G\in S/R_0} = \left\{\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OG}\right\}_{R_0}$

Le problème est de déterminer $\overrightarrow{OG}$.

$$\int_S \overrightarrow{GM}\,dm = \vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \int_S (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM})dm = \vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \int_S \overrightarrow{GO}\,dm + \int_S \overrightarrow{OM}\,dm = \vec{0}$$

O centre de R_0

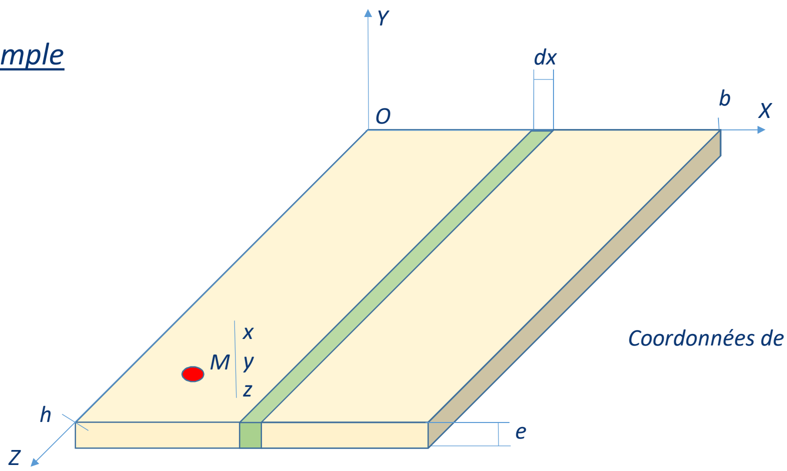
$$\overrightarrow{OG}\begin{vmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{vmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

$dm = \rho dxdydz \quad ce\ n'est\ pas \quad \rho dx_G dy_G dz_G$ *donc* $\overrightarrow{OG}$ *est vu comme une constante*

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GO}\underbrace{\int_S dm}_{m} + \int_S \overrightarrow{OM}\,dm = \vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_S \overrightarrow{OM}\,dm}$$

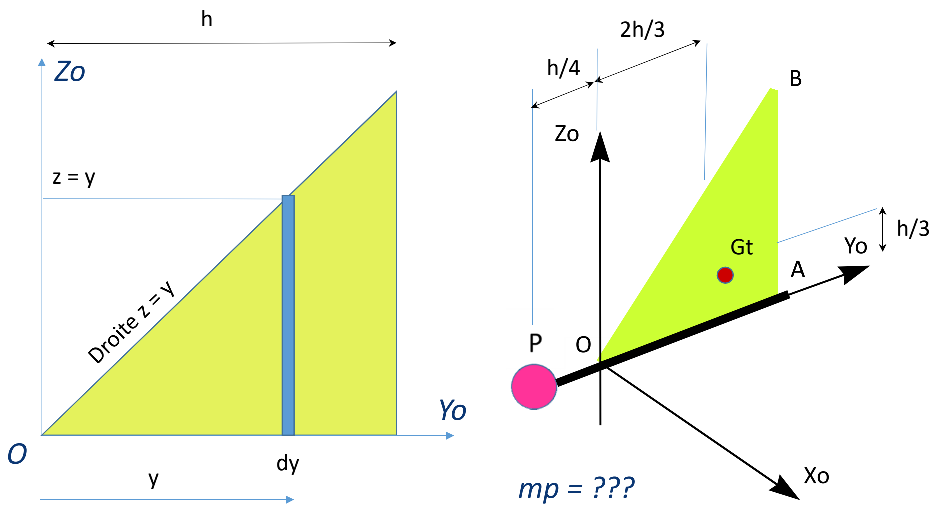
Etude n°3

__Exemple__



Coordonnées de G ?

Etude n°3

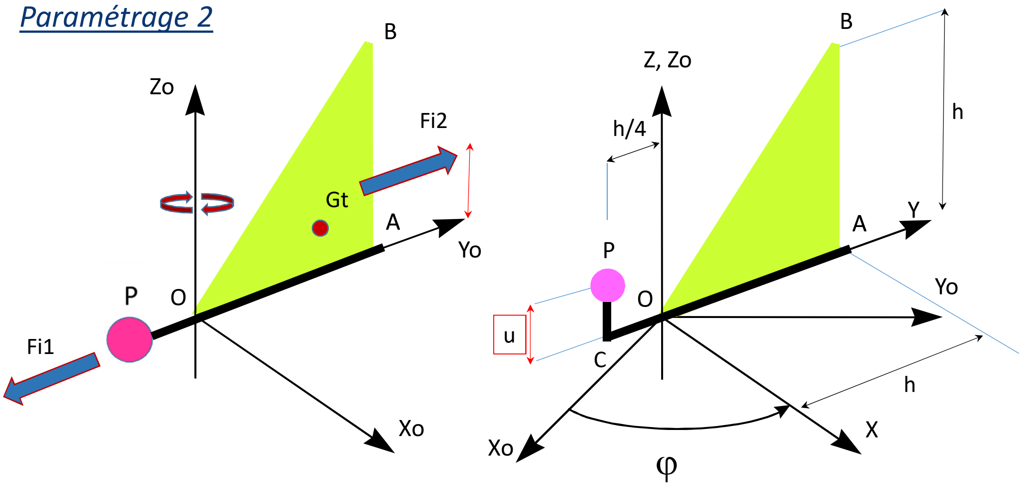


mp = ???

65

Etude n°3

Paramétrage 2



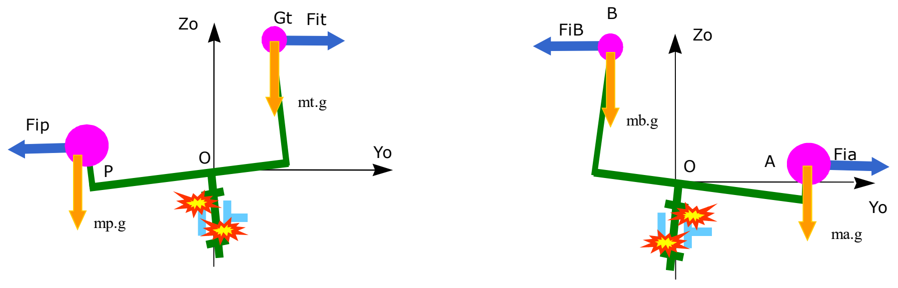
Déséquilibre des moments induits si rotation !

On remonte la masse…

66

Etude n°3

Déséquilibre dynamique



$\varphi = \omega.t$

$\varphi = \omega.t + \pi$

→ $\boxed{\text{CHOCS}}$

67

Etude n°3

Résultante cinétique (quantité de mouvement)

$$\vec{P}_{(S/R_0)} = \int_S \vec{V}_{(M/R_0)}\, dm$$ *Encore appelée quantité de mouvement.*

$$Or\ \vec{V}_{M/R_0} = \left\{\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\right\}_{R_0} = \left\{\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}\right)\right\}_{R_0}$$

$$\Leftrightarrow\ \vec{P}_{S/R_0} = \int_S \vec{V}_{G/R_0}\, dm + \int_S \left\{\frac{d}{dt}\overrightarrow{GM}\right\}_{R_0} dm \underset{ssi\ m\ est\ conservative}{=} \vec{V}_{G/R_0} \underbrace{\int_S dm}_{m} + \left\{\frac{d}{dt}\underbrace{\int_S \overrightarrow{GM}\, dm}_{\vec{0}\ \ G\ centre\ d'inertie}\right\}_{R_0}$$

$$\int \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}\int$$

Enfin : $\boxed{\vec{P}_{S/R_0} = m\vec{V}_{G/R_0}}$

Remarque : c'est surtout la conservation de $\vec{P}$ qu'on utilise quand $\vec{F}_{\bar{S}/S} = \vec{0}$

68

Etude n°3

* *Si* $F_{\bar{S}/S} = \vec{0}$ *(⇔ la force résultante est nulle)*

alors d'après PFD $m\vec{a}_{(G\in S/R_0)} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left\{\underbrace{m\vec{V}_{(G\in S/R_0)}}_{\vec{P}_{S/R_0}}\right\}_{R_0} = \vec{0}$

➡ *la résultante cinétique (quantité de mouvement) est constante (elle se conserve).*

- *De même si* $\vec{m}_{\bar{S}/S} = \vec{0}$ *(⇔ le moment résultant est nul, c'est ce qu'on veut pour équilibrer !)*

➡ *Alors le moment cinétique en G est constant (il se conserve).*

Stratégie : *on doit donc chercher à exprimer* σ *en fonction de u puis choisir u pour que* σ *soit constant…*

69

Etude n°3

L'opérateur d'inertie

$$\underbrace{\bar{\bar{I}}_{(O_s,S)}.\vec{u}}_{\bar{\bar{I}}_{(O_s,S)} \text{ appliquée à } \vec{u}} = \int_S \underbrace{\overrightarrow{O_sM}}_{} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{O_sM})dm$$

Point d'écriture de la matrice. C'est l'origine du repère lié à S.

Position de M dans le repère lié à S.

$\bar{\bar{I}}_{(O_s,S)}$ matrice 3x3

$\vec{u}$ vecteur qui sera $\vec{\Omega}_{s/R}$

Si $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$

$$\bar{\bar{I}}_{(O_s,S)}.\vec{u} = \begin{pmatrix} \int_S (y_S^2 + z_S^2)\,dm & -\int_S (y_S x_S)dm & -\int_S (z_S x_S)\,dm \\ -\int_S (x_S y_S)\,dm & \int_S (x_S^2 + z_S^2)dm & -\int_S (z_S y_S)\,dm \\ -\int_S (x_S z_S)\,dm & -\int_S (y_S z_S)\,dm & \int_S (x_S^2 + y_S^2)\,dm \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

70

Etude n°3

Moment cinétique

C'est le moment développé par la quantité de mouvement.

$$\vec{\sigma}_{(A,S/R_0)} = \int_S \vec{V}_{(M/R_0)} \wedge \overrightarrow{MA}\, dm$$

Après calculs, on aboutit à la relation toute intégrée (la relation ne contient plus de calculs d'intégrales, elles sont déjà calculées) :

$$\boxed{\vec{\sigma}_{(A,S/R_0)} = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{O_s \in S/R_0} + \bar{\bar{I}}_{(O_s,S)} \cdot \vec{\Omega}_{S/R_0} + m\overrightarrow{AO_s} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{O_sG})}$$

La relation se simplifie considérablement si :

$$\left[\begin{array}{l} O_s = G \quad (environ\ 9\ cas\ sur\ 10) \\ A = O_s = G \quad (environ\ 1\ cas\ sur\ 2) \quad alors \quad \vec{\sigma}_{(G,S/R_0)} = \bar{\bar{I}}_{(G,S)} \cdot \vec{\Omega}_{S/R_0} \end{array}\right.$$

72

Etude n°3

$$\bar{\bar{I}}_{(O_s,S)} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ & B & -D \\ & & C \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} A, B, C \text{ les moments d'inertie} & [kg.m^2] \\ D, E, F \text{ les produits d'inertie} & [kg.m^2] \end{cases}$$

Remarques :

- *Selon la géométrie de S et selon la base $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ utilisée, les termes peuvent être nuls.*
- *$\bar{\bar{I}}_{(O_s,S)}$ est symétrique, donc elle est diagonalisable.*
- $Si \quad D = E = F = 0 \qquad (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ *est alors la base principale de S*

⚠ *$\vec{u}$ et $\bar{\bar{I}}$ doivent être exprimés dans la même base. Sinon :*

- *soit on change $\bar{\bar{I}}$ de base en utilisant des matrices de passage,*
- *soit on change $\vec{u}$ de base par simple projection.*

73

Etude n°3

Théorème de HUYGENS

Rappel : G = centre d'inertie
O_s = centre du repère attaché à S.

dans 90% des cas, $G = O_s$.

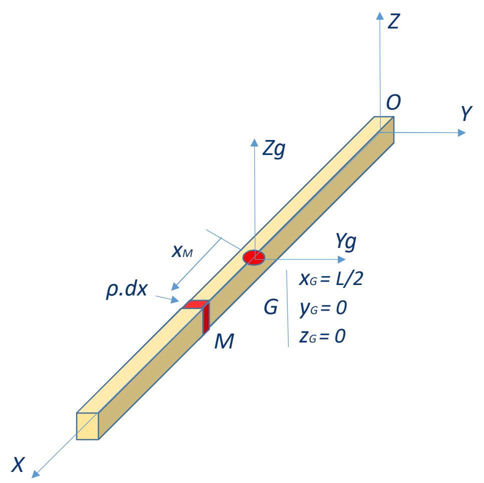
Sinon :

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{(O_s,S)}. = \bar{\bar{I}}_{(G,S)} + \underbrace{\bar{\bar{I}}_{(O_s,G(m))}}}$$

⇔ On attache toute la masse de S au point G

74

Exemple



$\bar{\bar{I}}_{(G,S)}$ = ?

$\bar{\bar{I}}_{(O,S)}$ = ?

75