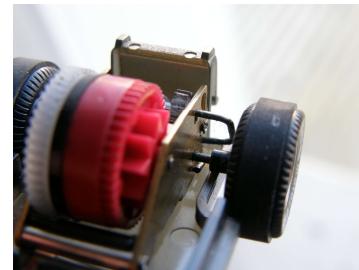


Etude n°5

Cette étude porte sur le théorème de l'énergie cinétique

Cahier des charges :

On souhaite déterminer les dimensions du volant d'inertie d'une voiture à friction dont la course est donnée.



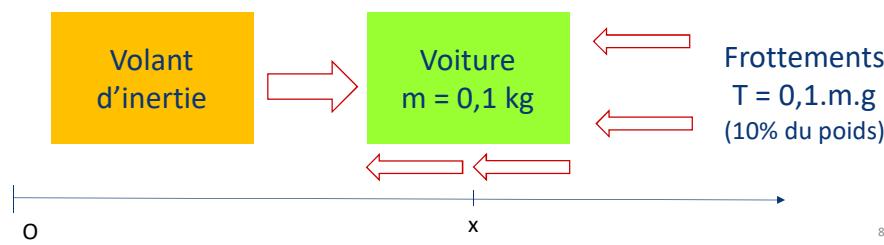
86

Etude n°5

Principe :

Le volant d'inertie est lancé préalablement, voiture en main, et permet le stockage d'énergie cinétique.

Puis la voiture est lâchée, l'énergie cinétique du volant est transférée à la voiture et dissipée en chaleur par les frottements...



87

Etude n°5

Architecture :

roue

R = 8 mm

rouant

r = 7 mm

• $Z1 = Z3 = 30$
• $Z2 = Z4 = 10$

$$K = \frac{\omega_{ro}}{\omega_{volant}} = \frac{Z4 \cdot Z2}{Z1 \cdot Z3} = \frac{1}{9}$$

88

Etude n°5

L'énergie mécanique permet à un corps de changer d'état.

Elle possède 2 natures :

Modification de la forme

Énergie potentielle Ep

F

Modification de la vitesse

Énergie cinétique Ec

V

89

Etude n°5

Le travail W d'une force sur un corps correspond à l'énergie qu'elle lui fournit quand son point d'application se déplace.

Il permet les déformations et les mouvements.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{A_1 A_2}$$

W initialement en [N.m], finalement en JOULE [J] pour éviter toute confusion avec le moment d'une force.

90

Etude n°5

Déformation du système Terre + S

$$W =$$

$$E_p =$$

Mouvement en translation de S

$$PFD \rightarrow \delta W =$$

$$E_c =$$

91

Etude n°5

Energie cinétique d'un solide S relativement à Ro:

Pour un point : $E_{C(M/R_0)} = \frac{1}{2} m \vec{V}_{(M/R_0)}^2 \rightarrow$ pour un solide : $E_{C(S/R_0)} = \int_S \frac{1}{2} \vec{V}_{(M/R_0)}^2 dm$

Si M et A appartiennent à S, il vient : $E_{C(S/R_0)} = \int_S \frac{1}{2} [\vec{V}_{A \in S/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AM}]^2 dm$

Après développement :

$$E_{C(S/R_0)} = \frac{1}{2} m \vec{V}_{A \in S/R_0}^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/R_0} \cdot \vec{I}_{(A,S)} \cdot \vec{\Omega}_{S/R_0} + m \vec{V}_{A \in S/R_0} \cdot (\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AG}) \quad [J]$$

Remarque :

- les intégrales sont « déjà » calculées (dans \vec{I} notamment...),
- il n'y a plus de point M,
- E_C est toujours positive ou nulle,
- E_C ne dépend pas du point d'écriture, en général c'est le point d'écriture de \vec{I} qui détermine le choix...

92

Etude n°5

Puissance développée sur un solide S relativement à Ro:

C'est l'énergie dépensée par unité de temps \rightarrow expression en fonction des vitesses :

$$P_{(\frac{\dot{S}/S}{forces \ mvt}, S/R_0)} = \vec{F}_{\dot{S}/S} \cdot \vec{V}_{G \in S/R_0} + \vec{m}_{\dot{S}/S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R_0} \quad [W]$$

Si $P > 0$ alors l'action mécanique participe à la croissance du paramètre \rightarrow effet moteur.

Sinon avec $P < 0$, c'est l'effet résistant qui est traduit ...

93

Puissance

C'est l'énergie dépensée par unité de temps :

$$P_{(\bar{S}/S, S/R_0)} = \vec{F}_{\bar{S}/S} \cdot \vec{V}_{G \in S/R_0} + \vec{m}_{\bar{S}/S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R_0}$$

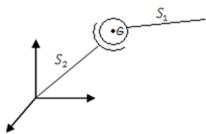
Si $T_{\bar{S}/S} = \{\vec{F}_{\bar{S}/S} | \vec{m}_{\bar{S}/S}\}$ torseur des actions mécaniques

Si $V_{S/R_0} = \{\vec{\Omega}_{S/R_0} | \vec{V}_{G, S/R_0}\}$ torseur cinématique

$P_{(\bar{S}/S, S/R_0)} = T_{\bar{S}/S} \otimes V_{S/R_0}$

comoment

Liaison rotule parfaite

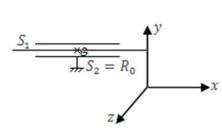


$$V_{S_1/S_2} = \begin{pmatrix} \alpha | 0 \\ \beta | 0 \\ \gamma | 0 \end{pmatrix}_G$$

$$T_{S_1/S_2} = \begin{pmatrix} X | 0 \\ Y | 0 \\ Z | 0 \end{pmatrix}_G$$

$$P_{(S_2/S_1, S_1/S_2)} = 0$$

Liaison pivot glissant parfaite



$$V_{S_1/S_2} = \begin{pmatrix} \alpha | u \\ 0 | 0 \\ 0 | 0 \end{pmatrix}_G$$

$$T_{S_2/S_1} = \begin{pmatrix} 0 | 0 \\ Y | M \\ Z | N \end{pmatrix}_G$$

$$P_{(S_2/S_1, S_1/S_2)} = 0$$

94

Etude n°5

Théorème de l'énergie cinétique:

Il est issu du PFD.
En général si on veut calculer des forces on utilise de préférence le PFD.
Si on préfère une équation entre paramètres du mouvement, on utilise le TEC.

$$\begin{cases} * \vec{V}_{G,S/R_0} \\ * \vec{\Omega}_{S/R_0} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{F}_{\bar{S}/S} = m \vec{a}_{(G \in S/R_0)} & (1) \\ \vec{m}_{G,\bar{S}/S} = \vec{\delta}_{G,S/R_0} & (2) \end{cases} \quad = \int_S \vec{a}_{(M/R_0)} dm$$

$$(1) + (2) \rightarrow \underbrace{\vec{F}_{\bar{S}/S} \cdot \vec{V}_{G,S/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \cdot \vec{m}_{G,\bar{S}/S}}_{P_{(\bar{S}/S, S/R_0)}} = m \vec{a}_{(G \in S/R_0)} \cdot \vec{V}_{G,S/R_0} + \vec{\delta}_{G,S/R_0} \cdot \vec{\Omega}_{S/R_0}$$

Tous calculs effectués :

$$P_{(\bar{S}/S, S/R_0)} = \frac{d}{dt} E_{C(S/R_0)}$$

95

Etude n°5

Intégrale première:

On définit l'énergie potentielle associée à une action mécanique sur S la quantité vérifiant :

$$P_{(\bar{S}/S,S/R_0)} = -\frac{d}{dt}E_p(\bar{S}/S,S/R_0)$$

Exemple : de A2 vers A1

$$P_{(Ter / ,S/R_0)} = -mg\vec{x} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \vec{x} = -mg \frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dt}(mgx + k)$$

ainsi $E_{p_{\text{pesanteur}}} = mgx + k$ avec par convention $EP = 0$ si $x = 0$ soit $k = 0$...

Si la puissance dérive d'une énergie potentielle, alors le TEC devient :

$$\frac{d}{dt}E_{c(S/R_0)} = P_{(\bar{S}/S,S/R_0)} = -\frac{d}{dt}E_p(\bar{S}/S,S/R_0) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}E_{c(S/R_0)} + \frac{d}{dt}E_p(\bar{S}/S,S/R_0) = 0$$

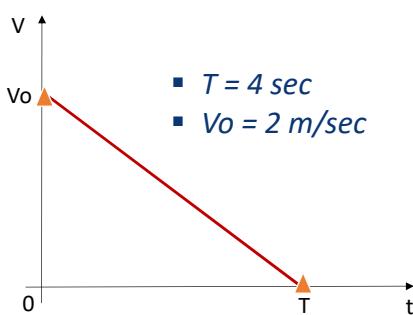
Donc $E_C + E_P = K$ Intégrale première

K est l'énergie mécanique de S...

96

Etude n°5

Graphe de la vitesse supposée :



Calcul de e : TEC appliquée à la voiture (volant compris)

$$P_{(\bar{S}/S,S/R_0)} = \frac{d}{dt}E_{c(S/R_0)}$$

$$-0,1.mg.x' = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(m.x'^2 + J.\omega_{\text{volant}}^2)$$

Avec $\omega_{\text{volant}} = \omega_{\text{roue}}/k$ et $\omega_{\text{roue}} = x'/R$

$$-0,1.mg = (m + \frac{J}{k^2.R^2}).x'' \quad \text{Forme de PFD}$$

$$\text{Soit } J = m.k^2.R^2 \left(-0,1 \frac{g}{x''} - 1 \right) \quad [kg.m^2]$$

Si $x'' = -V/T = -0,5 \text{ m/s}^2$

$$J = 0,1 \frac{1}{9^2} 0,008^2 \left(-0,1 \frac{9,81}{-0,5} - 1 \right) = 7,6.10E - 8 \text{ kg.m}^2$$

Rôle important de k pour diminuer la valeur de J !

Pour un cylindre $J = M.r^2/2 = \rho.\pi.r^4 e/2$

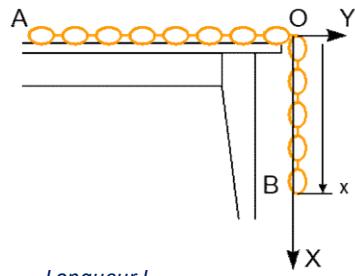
$$e = 2J/(\rho.\pi.r^4)$$

$$e = 2.7,6 \cdot 10^{-8} / (7800 \cdot \pi \cdot 0,007^4) = 2,5 \text{ mm}$$

98

Etude n°5

exemple: la chaîne sur la table



Longueur L

Masse linéique λ [kg/m]

$f = 0$ (frottements nuls)

$A \ t = 0, \ x = x_0, \ x' = 0$

Calculer $t = T$ tel que $x = L$
(la chaîne quitte la table)

Calcul de T :

TEC appliqué à la chaîne