La loi de comportement de la balance gyroscopique :

$$\vec{\sigma}_{(O,\Sigma/R_0)} = \vec{\sigma}_{(O,S2+M2+S3/R_0)} + \vec{\sigma}_{(O,S/R_0)}$$

$$= C2.\psi'.\overrightarrow{Zo} + A.\varphi'.\overrightarrow{X2} + C.\ \psi'.\ \overrightarrow{Zo}$$

$$\vec{\delta}_{(O,\Sigma/R_0)} = \left\{\frac{d\vec{\sigma}_{(O,E/R_0)}}{dt}\right\}_{Ro}$$

$$= (C2 + C).\psi''.\overrightarrow{Zo} + A.\varphi'.\psi'.\ \overrightarrow{Y}$$

$$\vec{M}_{(O,\overline{\Sigma}/\Sigma)} = +m.g.d.\overrightarrow{Y}$$

Rotation propre

Rotation de précession

$$m.g = \frac{+A.\varphi'.\psi'}{d}$$

Il faut donc placer 2 capteurs angulaires…

Et $\psi'' = 0 \rightarrow \psi'$ constant…

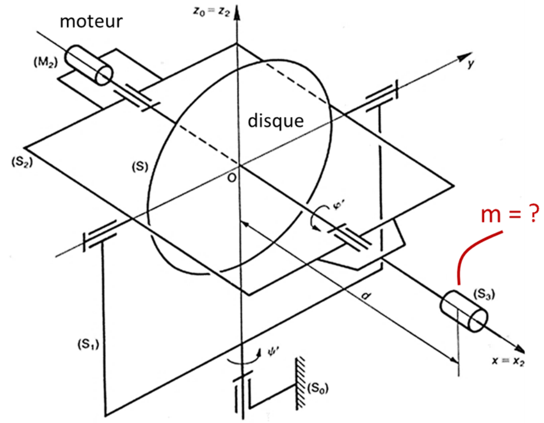
Grâce aux mesures des deux vitesses de rotation (rotation propre et précession) il devient en effet possible de déterminer la valeur de la masse m, ceci valide le principe de la balance gyroscopique…

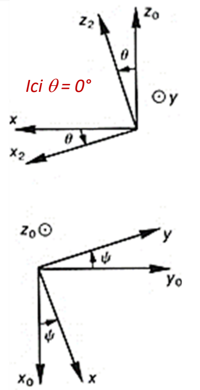
Mécanique du Solide
Dossier 4 – Dynamique du solide

Ce document est une synthèse du cours présenté

Problématique

Valider la conception d'une balance de type gyroscopique.
La valeur d'une masse est mesurée à l'aide de capteurs de vitesses angulaires…





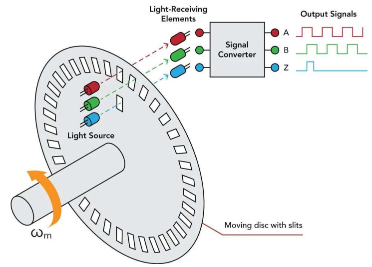
- $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x})$
- $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_2) = 0°\ \Leftrightarrow\ \vec{x}_2 = \vec{x}$ et $\vec{z}_2 = \vec{z}_0$
- $\Sigma = (S_2)+(M_2)+(S_3)+(S)$
- la matrice d'inertie, au point O, de l'ensemble $(S_2)+(M_2)+(S_3)$ est :

$$\underbrace{\bar{\bar{I}}(O, S_2 + M_2 + S_3)}_{E} = \begin{vmatrix} A_2 & -F_2 & 0 \\ -F_2 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{vmatrix}_{\vec{x}2,\vec{y},\vec{z}2}$$

- la matrice d'inertie, au point O, de (S) est :

$$(O, S) = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix}_{\vec{x}2,\vec{v},\vec{w}}$$ avec $\vec{z}o = \sin\varphi.\vec{v} + \cos\varphi.\vec{w}$

A = 2B = 2C



- masse de l'ensemble (S_3) = m
- $\vec{\Omega}_{(S/R0)} = \varphi'.\vec{x}_2 + \psi'.\vec{z}_0$ avec $\varphi' = cste$
- $\vec{\Omega}_{(S2+M2+S3/R_0)} = \psi'.\vec{z}_0$.

Ces vitesses sont mesurées à l'aide de 2 capteurs appelés encodeurs.

Résultante dynamique

$$\overrightarrow{\mathrm{Rd}}_{(S/R)} = \int_S \vec{a}_{(M/R)}\mathrm{dm}$$

De même que pour la résultante cinétique, on montre facilement que :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{Rd}}_{(S/R)} = \underbrace{\mathrm{m_s}\vec{a}_{(G/R)}}}$$

Quantité d'accélération,
au signe près, c'est la force d'inertie

$$\vec{F_i} = -m\vec{a}_{(G/R)} \quad [N]$$

G centre d'inertie joue le rôle d'ambassadeur des masses,
il représente l'ensemble des points matériels qui composent S...

Moment dynamique

C'est le moment développé par la résultante dynamique,
c'est au signe près le moment développé par la force d'inertie,
ici observé au point A...

$$\vec{\delta}_{(A,S/R)} = \int_S \vec{a}_{(M/R)} \wedge \overrightarrow{MA}\,\mathrm{dm}$$

De même qu'avec $\vec{\sigma}$, $\vec{\delta}$ est souvent incalculable directement depuis la relation de définition <u>mais on peut trouver un lien entre $\vec{\delta}$ et $\vec{\sigma}$:</u>

$$\vec{\delta}_{(A,S/R)} = \int_S \{\frac{d}{dt}\vec{V}_{(M/R)}\}_R \wedge \overrightarrow{MA}\,\mathrm{dm}$$

$$u'v = (uv)' - uv'$$

$$\vec{\delta}_{(A,S/R)} = \int_S \{\frac{d}{dt}\{\vec{V}_{(M/R)}\}_R \wedge \overrightarrow{MA}\} \ - \vec{V}_{(M/R)}\}_R \wedge \left\{\frac{d}{dt}\overrightarrow{MA}\right\}_R \mathrm{dm}$$

si la masse est conservative $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_S \quad = \int_S \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$

$$\vec{\delta}_{(A,S/R)} = \frac{d}{dt}\int_S \vec{V}_{(M/R)}\}_R \wedge \overrightarrow{MA}\,\mathrm{dm} \ - \underbrace{\int_S \vec{V}_{(M/R)}\}_R}_{\textit{résultante cinétique}} \wedge \left\{\frac{d}{dt}\underbrace{(\ +\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})}\right\}_R \mathrm{dm}$$

$$\vec{\delta}_{(A,S/R)} = \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{\sigma}_{(A,S/R)}\right\}_R - \mathrm{m}.\vec{V}_{G/R}\left\{\frac{d}{dt}(\ \overrightarrow{OA})\right\}_R - \int_S \vec{V}_{(M/R)} \ \wedge -\vec{V}_{(M/R)_R}\mathrm{dm}$$

$$\boxed{\vec{\delta}_{(A,S/R)} = \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{\sigma}_{(A,S/R)}\right\}_R + \mathrm{m}\vec{V}_{A/R} \wedge \vec{V}_{G/R}}$$

Remarque :

- Il n'y a pas d'intégrale à calculer
- L'expression se simplifie si $A = G$
- On réalise que pour accéder à $\vec{\delta}$

$\left[\begin{matrix}\overrightarrow{OG}\ ? \\ \bar{\bar{I}}_{(O_S,S)}\ ?\end{matrix}\right\}$ *géometrie des masses*

$\vec{V}_G, \vec{\Gamma}_G \ ?\}$ *cinématique*

$\vec{\sigma}_{(A,S/R)}\ ?\}$ *cinétique*

$\vec{\delta}_{(A,S/R)}\ ?\}$ *dynamique*

PROTOCOLE
à respecter

Le moment dynamique est donc un MOMENT et
il vérifie donc la relation de champ de moment.
On montrerait facilement :

$$\boxed{\underbrace{\vec{\delta}_{(A,S/R)}}_{\overrightarrow{m_A}} = \underbrace{\vec{\delta}_{(B,S/R)}}_{\overrightarrow{m_B}} + \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{Rd}}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BA}}}_{\vec{R} \wedge \overrightarrow{BA}}}$$

Principe Fondamental de la Dynamique

Le principe fondamental de la dynamique, formulé par Isaac Newton au XVIIe siècle, relie le mouvement d'un objet aux forces qui s'exercent sur lui.
Avant Newton, Galilée avait montré que le mouvement uniforme ne nécessitait pas de force.
S'appuyant sur les travaux de Galilée, des observations et des expérimentations Newton introduit une formulation capitale car quantitative et rigoureuse :

- Il définit la **quantité de mouvement** $\vec{p} = m\vec{v}$.
- Il constate qu'une force provoque une **variation de cette quantité** :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

- Si la masse est constante, cela devient la relation connue :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}.$$

- Cette équation permet de **déterminer le mouvement d'un corps** à partir des forces qui s'exercent sur lui — c'est le cœur de la mécanique newtonienne.

Newton a ouvert la voie en comprenant que certaines quantités liées à la rotation (comme le moment cinétique) se conservent en absence de couple.
Mais la théorie complète des moments a été développée par Euler, un siècle plus tard...

Le principe permet de prévoir le mouvement des objets soumis à différentes forces (gravité, frottements, tension...). Il constitue toujours la base de la mécanique classique et reste essentiel en physique moderne.

Si m conservative

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases}\vec{\mathrm{R}}_{(\bar{S}/S)} = \overrightarrow{\mathrm{Rd}}_{(S/Rg)} & [N] \\ \vec{\mathrm{m}}_{(A,S/Rg)} = \vec{\delta}_{(A,S/Rg)} & [N.m]\end{cases}}$$

$\bar{S}$ extérieur à S

Rg repère galiléen (fixe)

A est l'observateur, c'est le même lieu d'observation pour exprimer $\vec{m}$ et $\vec{\delta}$

Cela s'écrit aussi
$\mathrm{T}_{\bar{S}/S} = \mathrm{D}_{S/R}$

$\mathrm{T}_{\bar{S}/S}$: Torseur actions mécaniques : $\{\vec{\mathrm{R}}_{(\bar{S}/S)} \mid \vec{\mathrm{m}}_{(\bar{S}/S)}\}_A$

$\mathrm{D}_{S/Rg}$: Torseur dynamique $\{\overrightarrow{\mathrm{Rd}}_{(S/Rg)} \mid \vec{\delta}_{(S/Rg)}\}_A$

Il s'agit au départ de deux équations vectorielles.
C'est donc, après projection du PFD, 6 équations scalaires que l'on peut écrire.