Moment cinétique :

C'est le moment développé par la quantité de mouvement. $\vec{\sigma}_{(A,S/R_0)} = \int_S \vec{V}_{(M/R_0)} \wedge \overrightarrow{MA}\, dm$

$$\vec{\sigma}(A \in S/R) = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M \in S/R).dm(M)$$

$$= \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left[\vec{V}(Os \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{OsM}\right].dm(M)$$

Or $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AOs} + \overrightarrow{OsM}$

$$= \int_S \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\right) \wedge \vec{V}(Os \in S/R).dm(M) + \int_S (\overrightarrow{AOs} + \overrightarrow{OsM}) \wedge (\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{OsM})\,dm(M)$$

$$= \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(Os \in S/R).\int_S dm(M) + \int_S \overrightarrow{OsM}) \wedge (\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{OsM})\,dm(M) + \int_S (\overrightarrow{AOs}) \wedge (\vec{\Omega}(S/R) \wedge (\overrightarrow{OsG} + \overrightarrow{GM}).dm(M)$$

Après calculs, on aboutit à la relation toute intégrée simplifiée (la relation ne contient plus de calculs d'intégrales, elles sont déjà calculées) :

$$\boxed{\vec{\sigma}_{(A,S/R_0)} = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{O_s \in S/R_0} + \bar{\bar{I}}_{(O_s,S)}.\vec{\Omega}_{S/R_0} + m\overrightarrow{AO_s} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{O_sG})}$$

La relation se simplifie considérablement si :

$$\begin{cases} O_s = G & \text{(environ 9 cas sur 10) alors } \vec{\sigma}_{(G,S/R_0)} = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{G \in S/R_0} + \bar{\bar{I}}_{(G,S)}.\vec{\Omega}_{S/R_0} \\ A = O_s = G & \text{(environ 1 cas sur 2) alors } \vec{\sigma}_{(G,S/R_0)} = \bar{\bar{I}}_{(G,S)}.\vec{\Omega}_{S/R_0} \end{cases}$$

$$\bar{\bar{I}}_{(O_s,S)} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ & B & -D \\ & & C \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} A, B, C \text{ les moments d'inertie } [kg.m^2] \\ D, E, F \text{ les produits d'inertie } [kg.m^2] \end{cases}$$

- Selon la géométrie de S et selon la base $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ utilisée, les termes peuvent être nuls.
- $\bar{\bar{I}}_{(O_s,S)}$ est symétrique, donc elle est diagonalisable.
- Si $D = E = F = 0$ $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est alors la base principale de S

$\vec{u}$ et $\bar{\bar{I}}$ doivent être exprimés dans la même base. Sinon :
- soit on change $\bar{\bar{I}}$ de base en utilisant des matrices de passage,
- soit on change $\vec{u}$ de base par simple projection.

$$\bar{\bar{I}}_{(O,T)} = \begin{pmatrix} B+C & -F & 0 \\ & B & -D \\ & & C \end{pmatrix} \quad \text{car } XM = 0$$

$$C = \int_S (O + y_S^2)\,dm = \rho \int_0^h y^2 . \int_0^y dz.dy = \rho.\frac{h^4}{4} = mt.\frac{h^2}{2}$$

$$-D = -\int_S (ys.zs)\,dm = -\rho\int_0^h y \ .\int_0^y zdz.dy = -\rho.\frac{h^4}{8} = -mt.\frac{h^2}{4}$$

$$\vec{\sigma}_{(O,S/R_0)} = \vec{\sigma}_{(O,P/R_0)} + \vec{\sigma}_{(O,T/R_0)} = m\vec{V}_{P/Ro} \wedge \overrightarrow{PO} + m\overrightarrow{OGt} \wedge \vec{V}_{O \in S/R_0} + \bar{\bar{I}}_{(O,T)}.\vec{\Omega}_{T/R_0} + m\overrightarrow{OO} \wedge (\vec{\Omega}_{T/R_0} \wedge \overrightarrow{OG})$$

$$= 8mt/3.\vec{V}_{P/Ro} \wedge \overrightarrow{PO} + \bar{\bar{I}}_{(O,T)}.\vec{\Omega}_{T/R_0}$$

$$= 8mt/3.h^2/16.\varphi'.\overrightarrow{Zo} + 8mt/3.h.u/4.\varphi'.\overrightarrow{Y} - mt.\frac{h^2}{4}.\varphi'.\overrightarrow{Y} + mt.\frac{h^2}{4}.\varphi'.\overrightarrow{Zo}$$

Le moment cinétique est constant s'il est constant notamment en direction. Or la composante sur OY présente dans l'expression est variable.

En revanche si la distance u est telle que : $8u/12 - \frac{h^2}{4} = 0$ soit u =

Mécanique du Solide
Dossier 3 – Cinétique du solide

Ce document est une synthèse du cours présenté

Problématique

Le radar (acronyme issu de l'anglais radio detection and ranging) est un système qui utilise les ondes électromagnétiques pour détecter la présence, la position ainsi que la vitesse d'objets tels que les avions, les bateaux, ou la pluie. Les ondes envoyées par l'émetteur sont réfléchies par la cible, et les signaux de retour (appelés écho radar ou écho-radar) sont captés et analysés par le récepteur, souvent situé au même endroit que l'émetteur.

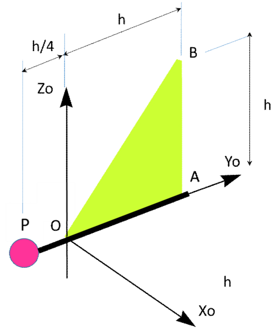
La distance est obtenue grâce au temps aller/retour du signal, la direction grâce à la position angulaire de l'antenne où le signal de retour a été capté et la vitesse avec le décalage de fréquence du signal de retour généré selon l'effet Doppler. Il existe également différentes informations trouvées par le rapport entre les retours captées selon des plans de polarisation orthogonaux.

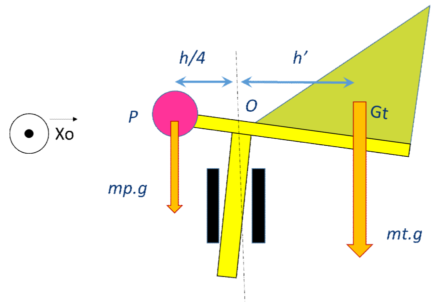
On souhaite concevoir un radar tournant dont le châssis est parfaitement équilibré statiquement et dynamiquement.

Géométrie des masses

La radar (S) est modélisé par la composition de 3 solides, une sphère assimilable à un point matériel P, une barre non pesante PA et un triangle matériel T= OAB..

Paramétrage 1



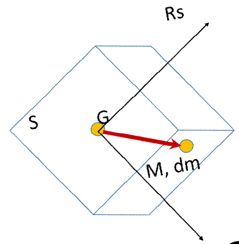


Sous l'action des poids respectifs et des moments générés au point d'observation O, le radar risque d'être déséquilibré statiquement (quand il ne tourne pas).

On attribue une quantité de matière au point courant M élément du solide S.
La mesure de la matière contenue est la masse.
On passe ainsi de la cinématique du solide à la cinétique du solide…

Hypothèse : ∀ M et N∈S, ∀ t1 et t2 : m(S,t1) = m(S,t2) → La masse est dite « conservative ».

G est centre d'inertie de S si et seulement si : $\boxed{\int_S \overrightarrow{GM}.dm = \vec{0}}$



Position de M relativement à G dans Rs, repère lié au solide S.

Propriétés de G :

- G est unique
- G ∈ axes de symétrie éventuels de S
- G n'est pas un point matériel de S (ex : un tube, G est sur l'axe)

En pratique on désire souvent connaître $\vec{a}_{G\in S/R_0}$ pour écrire le PFD : $\vec{a}_{G\in S/R_0} = \left\{\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OG}\right\}_{R_0}$

Le problème est de déterminer $\overrightarrow{OG}$.

$$\int_S \overrightarrow{GM}\,dm = \vec{0} \iff \int_S (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM})dm = \vec{0} \iff \int_S \overrightarrow{GO}\,dm + \int_S \overrightarrow{OM}\,dm = \vec{0}$$

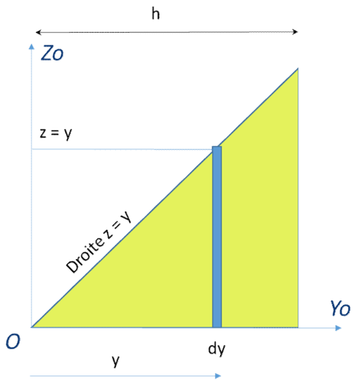
Avec O centre de R_0

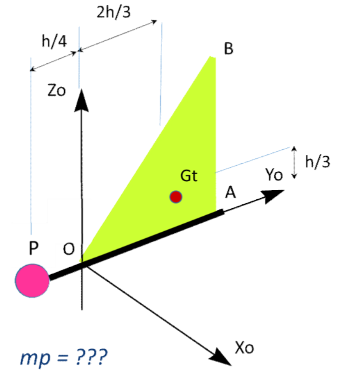
$dm = \rho dxdydz$ ce n'est pas $\rho dx_G dy_G dz_G$ donc $\overrightarrow{OG}$ est vu comme une constante

$$\iff \overrightarrow{GO}\underbrace{\int_S dm}_{m} + \int_S \overrightarrow{OM}\,dm = \vec{0} \iff \quad \boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_S \overrightarrow{OM}\,dm}$$

$\overrightarrow{OG}\begin{vmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$

$\rightarrow XG = \frac{1}{m}\int_S XM\,dm$





On cherche d'abord le lieu de Gt qui vérifie notamment $\rightarrow YGt = \frac{1}{m}\int_S YM\,dm$

Or dm = ρ.ZM.dy = ρ .YM.dy car le triangle est isocèle donc à la frontière de l'hypoténuse ZM = YM

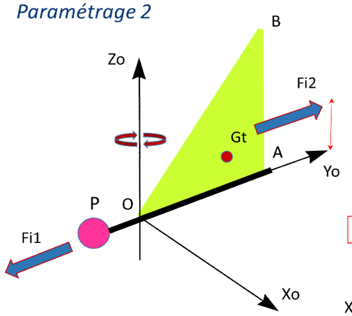
Il vient facilement $YGt = \frac{1}{m}\int_S Y^2M.\rho.dy = \frac{1}{\rho.h^2/2}\int_0^h Y^2M.\rho.dy = 2h/3$.

On trouverait de même ZGt = h/3.

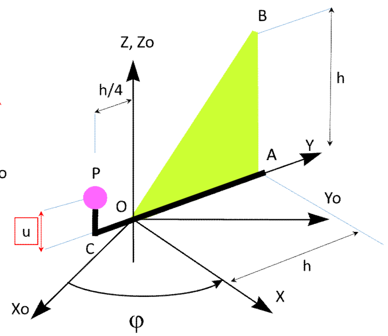
mp vérifie l'équilibre des moments observés en O par exemple : mp.g.h/4 = mt.g.2h/3 d'où mp = 8.mt/3

Résultante cinétique du soilide

Paramétrage 2



Déséquilibre des moments induits si rotation !

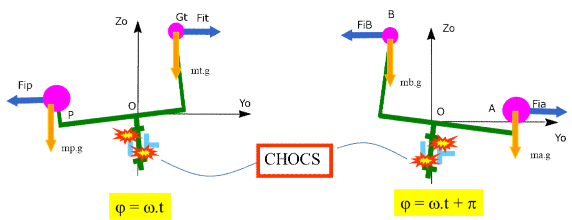


On remonte la masse...

Grâce à la valeur de mp le radar est désormais équilibré statiquement mais quand il tourne autour de Ozo, rien ne dit que les effort d'inertie appliqués disons en P et en Gt génèrent des moments au point O qui se compensent exactement.

Déséquilibre dynamique

Le jeu dans la liaison autorise alors l'arbre à « boiter » sous le moment résiduel qui change en permanence de direction.
Ceci génère des chocs et des vibrations très néfastes à la mécanique.



Résultante cinétique (ou quantité de mouvement)

$$\vec{P}_{(S/R_0)} = \int_S \vec{V}_{(M/R_0)}\,dm \qquad Or\ \vec{V}_{M/R_0} = \left\{\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\right\}_{R_0} = \left\{\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM})\right\}_{R_0}$$

$$\iff \vec{P}_{S/R_0} = \int_S \vec{V}_{G/R_0}\,dm + \int_S \left\{\frac{d}{dt}\overrightarrow{GM}\right\}_{R_0} dm \underset{\substack{ssi\ m\ est\\ conservative}}{=} \vec{V}_{G/R_0}\underbrace{\int_S dm}_{m} + \left\{\frac{d}{dt}\underbrace{\int_S \overrightarrow{GM}\,dm}_{\substack{\vec{0}\\ G\ centre\ d'inertie}}\right\}_{R_0}$$

Enfin : $\boxed{\vec{P}_{S/R_0} = m\vec{V}_{G/R_0}}$ $\qquad \int \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}\int$

Si $\vec{F}_{\bar{S}/S} = \vec{0}$ (⇔ la force résultante est nulle) alors d'après PFD $m\vec{a}_{(G\in S/R_0)} = \vec{0} \iff \frac{d}{dt}\left\{\underbrace{m\vec{V}_{(G\in S/R_0)}}_{\vec{P}_{S/R_0}}\right\}_{R_0} = \vec{0}$

→ la résultante cinétique (quantité de mouvement) est constante (elle se conserve).

De même si $\vec{m}_{\bar{S}/S} = \vec{0}$ (⇔ le moment résultant est nul, c'est ce qu'on veut pour équilibrer le radar !)

→ le moment cinétique σ en G est constant (il se conserve).

Stratégie : *on doit donc chercher à exprimer σ en fonction de l'altitude u puis choisir u pour que σ soit constant…*

Moment cinétique du soilide

On définit l'opérateur d'inertie :

$\bar{\bar{I}}_{(O_S,S)}$ appliquée à $\vec{u}$

$$\bar{\bar{I}}_{(O_S,S)}.\vec{u} = \int_S \underbrace{\overrightarrow{O_SM}}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{O_SM})dm$$

Point d'écriture de la matrice.
C'est l'origine du repère lié à S.

Position de M dans le repère lié à S.

$\bar{\bar{I}}_{(O_S,S)}$ matrice 3x3
$\vec{u}$ vecteur qui sera $\vec{\Omega}_{S/R}$

Si $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{(O_S,S)}.\vec{u} = \begin{pmatrix} \int_S (y_S^2 + z_S^2)\,dm & -\int_S (y_Sx_S)dm & -\int_S (z_Sx_S)\,dm \\ -\int_S (x_Sy_S)\,dm & \int_S (x_S^2 + z_S^2)dm & -\int_S (z_Sy_S)\,dm \\ -\int_S (x_Sz_S)\,dm & -\int_S (y_Sz_S)\,dm & \int_S (x_S^2 + y_S^2)\,dm \end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$$