Etude n°4

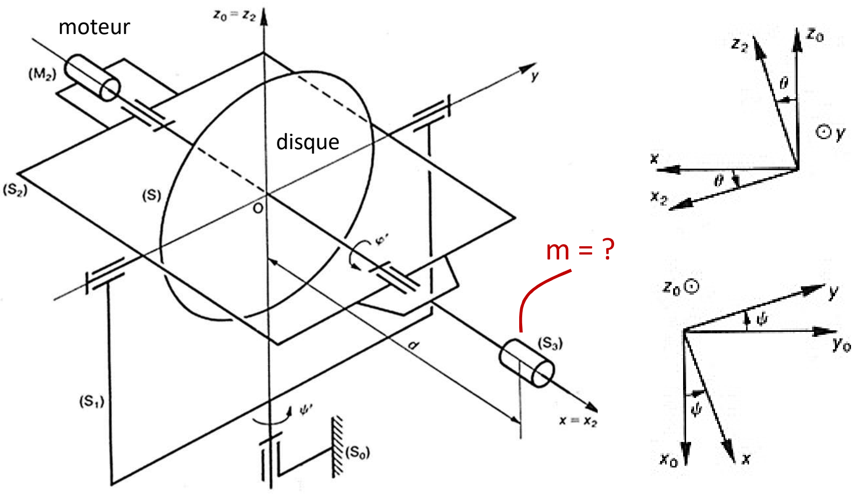
Cette étude porte sur le moment dynamique et le Principe Fondamental de la Dynamique (P.F.D.)

Cahier des charges :

Concevoir une balance gyroscopique, où une force est mesurée à l'aide de capteurs de vitesses angulaires…

Etude n°4

Modélisation :



Etude n°4

Hypothèses :

- $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x})$
- $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_2) = 0° \Leftrightarrow \vec{x}_2 = \vec{x}$ et $\vec{z}_2 = \vec{z}_0$
- $\Sigma = (S_2)+(M_2)+(S_3)+(S)$
- la matrice d'inertie, au point O, de l'ensemble $(S_2)+(M_2)+(S_3)$ est :

$$\overline{\overline{I}}(O, \underbrace{S_2 + M_2 + S_3}_{E}) = \begin{vmatrix} A_2 & -F_2 & 0 \\ -F_2 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{vmatrix}_{\vec{x}2, \vec{y}, \vec{z}2}$$

- la matrice d'inertie, au point O, de (S) est :

$$(O, S) = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix}_{\vec{x}2, \vec{v}, \vec{w}} \quad \text{avec } \vec{z}o = \sin\varphi.\vec{v} + \cos\varphi.\vec{w}$$

A = 2B = 2C

- masse de l'ensemble (S_3) = m
- $\vec{\Omega}_{(S/R0)} = \varphi'.\vec{x}_2 + \psi'.\vec{z}_0$ avec $\varphi' = cste$
- $\vec{\Omega}_{(S2+M2+S3/R_0)} = \psi'.\vec{z}_0$.

79

Etude n°4

La résultante dynamique:

$$\overrightarrow{Rd}_{(S/R)} = \int_S \vec{a}_{(M/R)} dm$$

De même que pour la résultante cinétique, on montre facilement que :

$$\underbrace{\boxed{\overrightarrow{Rd}_{(S/R)} = m_s \vec{a}_{(G/R)}}}$$

Quantité d'accélération,
au signe près, c'est la force d'inertie

$$\vec{F_i} = -m\vec{a}_{(G/R)} \quad [N]$$

80

Etude n°4

Le moment dynamique:

C'est le moment développé par la résultante dynamique,
c'est au signe près le moment développé par la force d'inertie.

$$\vec{\delta}_{(A,S/R)} = \int_S \vec{a}_{(M/R)} \wedge \overrightarrow{MA}\, dm$$

De même qu'avec $\vec{\sigma}$, $\vec{\delta}$ est incalculable directement *mais on peut trouver un lien entre $\vec{\delta}$ et $\vec{\sigma}$:*

$$\boxed{\vec{\delta}_{(A,S/R)} = \left\{\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{(A,S/R)}\right\}_R + m\vec{V}_{A/R} \wedge \vec{V}_{G/R}}$$

81

Etude n°4

Remarque :

- Il n'y a pas d'intégrale à calculer
- L'expression se simplifie si $A = G$
- On réalise que pour accéder à $\vec{\delta}$

$$\left.\begin{bmatrix}\overrightarrow{OG}\ ? \\ \bar{\bar{I}}_{(O_s,S)}\ ?\end{bmatrix}\right\}\textit{géométrie des masses}$$

$$\vec{V}_G, \vec{\Gamma}_G\ ?\ \}\ \textit{cinématique}$$

$$\vec{\sigma}_{(A,S/R)}\ ?\ \}\ \textit{cinétique}$$

$$\vec{\delta}_{(A,S/R)}\ ?\ \}\ \textit{dynamique}$$

On montrerait facilement : $\boxed{\vec{\delta}_{(A,S/R)} = \vec{\delta}_{(B,S/R)} + \overrightarrow{Rd}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{BA}}$

$\overrightarrow{m_A}$ $\overrightarrow{m_B}$ $\vec{R} \wedge \overrightarrow{BA}$

82

Etude n°4

Le Principe Fondamentale de la Dynamique (P.F.D.) - NEWTON (1642-1727) :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{R}_{(\bar{S}/S)} = \overrightarrow{Rd}_{(S/Rg)} \\ \vec{m}_{(A,S/R\ )} = \vec{\delta}_{(A,S/Rg)} \end{cases}}$$

$\bar{S}$ extérieur à S

Rg repère galiléen (fixe)

A est l'observateur, c'est le même lieu d'observation pour exprimer $\vec{m}$ et $\vec{\delta}$

Cela s'écrit aussi
$T_{\bar{S}/S} = D_{S/R}$

$T_{\bar{S}/S}$: Torseur actions mécaniques : $\left\{\vec{R}_{(\bar{S}/S)} \middle| \vec{m}_{(\bar{S}/S)}\right\}_A$

$D_{S/R}$: Torseur dynamique $\left\{\overrightarrow{Rd}_{(S/Rg)} \middle| \vec{\delta}_{(S/Rg)}\right\}_A$

Il s'agit au départ de deux équations vectorielles.
C'est donc, après projection du PFD, 6 équations scalaires que l'on peut écrire.

83

Etude n°4

La loi de comportement de la balance gyroscopique :

$$\vec{\sigma}_{(O,\Sigma/R_0)} = \vec{\sigma}_{(O,S2+M2+S3/R_0)} + \vec{\sigma}_{(O,S/R_0)}$$

$$= C2.\psi'.\overrightarrow{Zo} + A.\varphi'.\overrightarrow{X2} + C.\ \psi'.\overrightarrow{Zo}$$

$$\vec{\delta}_{(O,\Sigma/R_0)} = \left\{\frac{d\vec{\sigma}_{(O,E/R_0)}}{dt}\right\}_{Ro}$$

$$= (C2 + C).\psi''.\overrightarrow{Zo} + A.\varphi'.\psi'.\overrightarrow{Y}$$

$$\vec{M}_{(0,\overline{\Sigma}/\Sigma\ )} = +m.g.d.\overrightarrow{Y}$$

$$m.g = \frac{+A.\varphi'.\psi'}{d}$$

Il faut donc placer
2 capteurs angulaires…

Et $\psi'' = 0 \rightarrow \psi'$ constant…

84