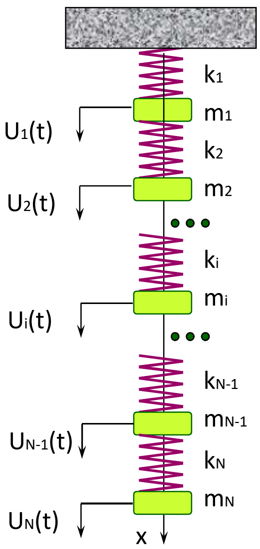
Vibrations mécaniques - partie A2



Systèmes à N degrés de libertés

Etude a : table vibrante

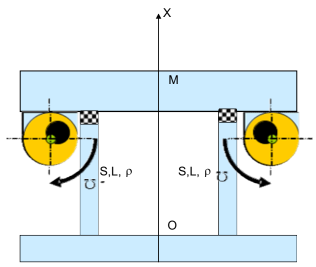
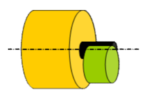


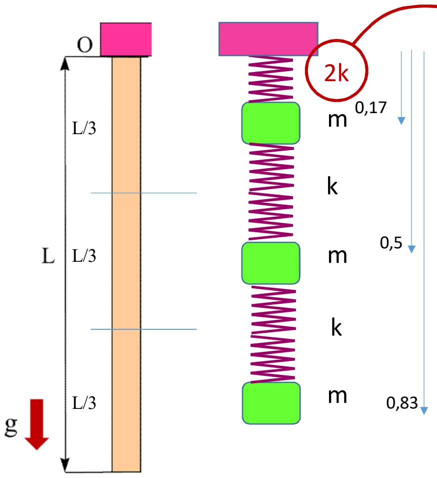
Table vibrante



Moteur à excentrique

On considère une table vibrante unidirectionnelle utilisée en laboratoire de recherche pour éprouver dynamiquement les piles à combustibles.
Elle est formée d'un solide indéformable de masse M dont le seul mouvement possible est une translation suivant l'axe Ox et de poutres identiques, de section droite constante d'aire S, de longueur L et usinées dans un matériau homogène de masse volumique ρ et de module d'Young E. Les poutres sont encastrées dans une semelle indéformable reposant sur le sol.
La table reçoit deux moteurs à excentriques qui tournent à la même vitesse Ω mais en sens opposés.

Etude a : système à 3 DDL

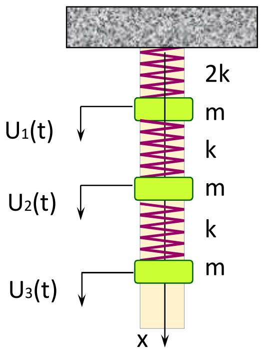


Plus court donc plus raide.

Etude des vibrations longitudinales
des poutres support.

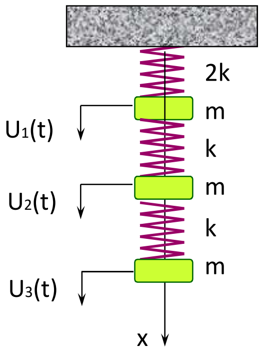
→ Discrétisation d'un système continu,
→ Recherche des fréquences naturelles.

Etude a : système à 3 DDL



Déterminer les 3 équations différentielles qui
décrivent les oscillations de ce système à 3 DDL.

Etude a : système à 3 DDL



Déterminer les 3 fréquences naturelles de ce système.

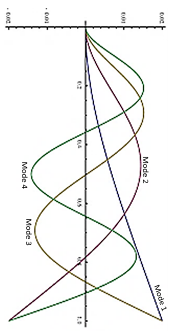
$$\begin{vmatrix} 3-\omega^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\omega^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

https://calculis.net/resoudre-equation-troisieme-degre

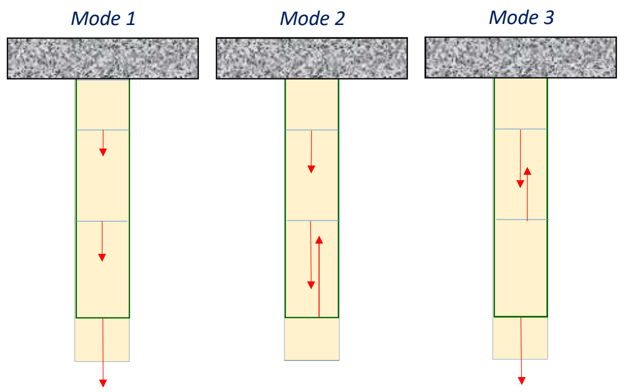
Etude a : système à 3 DDL

TRANSVERSALEMENT

Modes

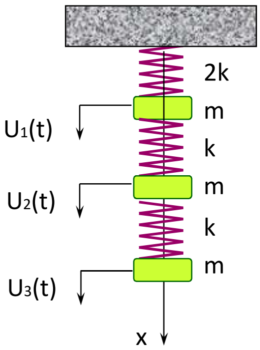


LONGITUDINALEMENT



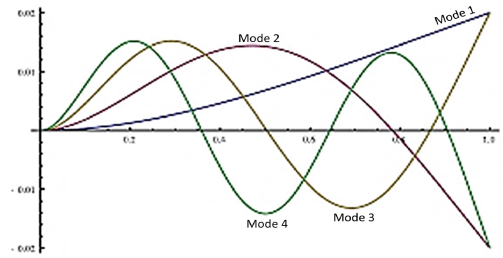
Les modes de vibrations transversales d'une poutre encastrée-libre permettent de deviner l'allure des modes longitudinaux.

Etude a : système à 3 DDL

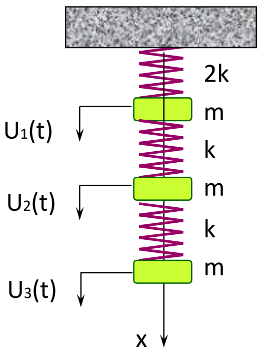


Pour les deux premiers modes propres on choisit comme vecteurs propres :

$$\vec{A1}^{\,t}(1,2,3) \qquad \vec{A2}^{\,t}(1,3,0)$$

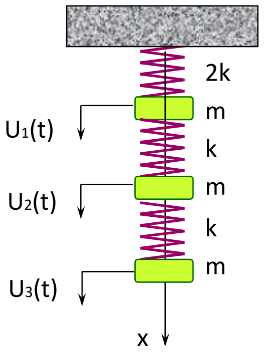


Etude a : système à 3 DDL



Calculer les matrices des masses et des raideurs réduites.

Etude a : système à 3 DDL

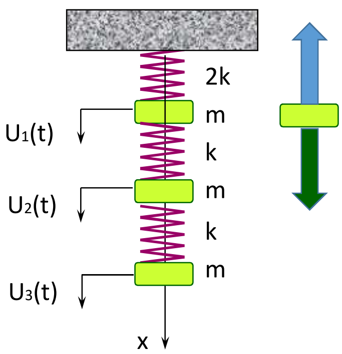


En déduire les deux premières pulsations propres approchées et les comparer aux valeurs réelles ci-dessous :

$$\omega 1r = 0{,}52\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega 2r = 1{,}41\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega 3 = 1{,}93\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Etude a : système à 3 DDL

real natural frequencies :



Determine the 3 differential equations which describe the oscillations of this system with 3 DOF.

-2k.U1 + k(U2-U1) = m.U1''.

Action reaction

-k(U2-U1) +k(U3-U2) = m.U2''

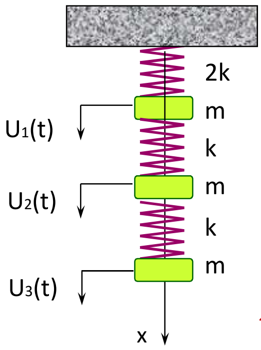
Action reaction

-k(U3-U2) = m.U3''.

$$\left.\begin{array}{l} m.U1'' + 3KU1 - kU2 = 0 \\ m.U2'' - kU1 + 2KU2 - kU3 = 0 \\ m.U3'' - KU2 + kU3 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\overline{M}} = m\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \overline{\overline{K}} = K\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad (\overline{K} - \omega i^2.\overline{M}).\vec{U} = \vec{0}$$

Etude a : système à 3 DDL



Then $\left|\overline{K} - \omega i^{\,2}.\overline{M}\right| = 0$ ...

Determine the 3 real natural frequencies of this system.

$$\begin{vmatrix} 3-\omega^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\omega^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

2nd line

$(3-\omega^2)*[(2-\omega^2).(1-\omega^2) - 1] - - 1*[-1.(1-\omega^2)+ 1.0] = 0$

$(3-\omega^2)*[\omega^4-3\omega^2+1] -[(1-\omega^2] = 0$

$[-\omega^6 + 6\,\omega^4 - 9\,\omega^2 + 2] = 0$

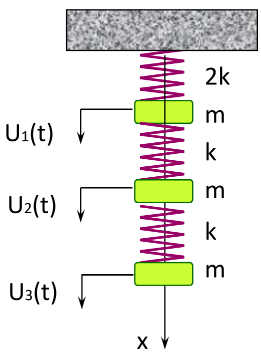
$\omega 1^2 = 0{,}26.\frac{K}{m}$ $\quad\omega 1 = 0{,}50\sqrt{\frac{K}{m}}$

$\omega 2^2 = 2\,\frac{K}{m}$ $\quad\omega 2 = 1{,}41\sqrt{\frac{K}{m}}$

$\omega 3^2 = 3{,}73\,\frac{K}{m}$ $\quad\omega 3 = 1{,}93\,\sqrt{\frac{K}{m}}$

https://calculis.net/resoudre-equation-troisieme-degre

Etude a : système à 3 DDL



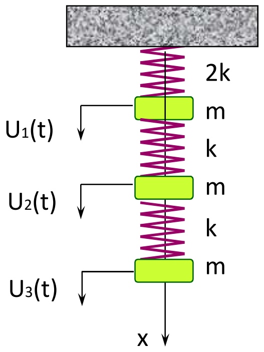
Calculate the matrices of the reduced masses and stiffnesses.

$$\bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{M}}^* = m.\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = m.\begin{pmatrix} 53 & -9 \\ -9 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{K}}^* = k.\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 15 & -5 \\ -5 & 28 \end{pmatrix}$$

Etude a : système à 3 DDL



Deduce the first two approximate eigenfrequencies and compare them with the real values below:

$\omega 1r = 0{,}50\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega 2r = 1{,}41\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\left|\overline{K*} - \omega i^{\,2}.\overline{M*}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 15 - 53\omega i^2 & -5 + 9\omega i^2 \\ -5 + 9\omega i^2 & 28 - 14\omega i^2 \end{vmatrix} = 0$$

Don't forget k and m !

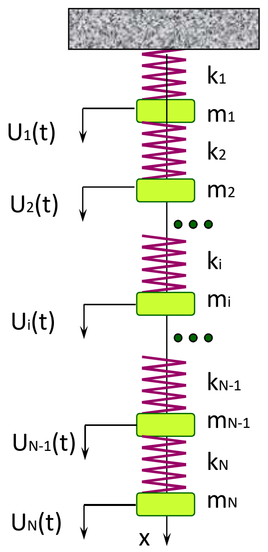
$$661\omega i^4 - 1604\omega i^2 + 395 = 0$$

$\omega 1^2 r = 0{,}27\,\frac{k}{m} \qquad \omega 2^2 r = 2{,}15\,\frac{k}{m}$

The first two approximate eigenfrequencies are :

$\omega 1r = 0{,}52\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega 2r = 1{,}47\sqrt{\frac{k}{m}}$ very accurate !

Etude b : système à N DDL



N systèmes masse-ressort (structures réelles, $\varepsilon \to 0$)

⬇

N équations d'équilibre

$\overline{\overline{K}}$ *et* $\overline{\overline{M}}$ *matrices d'ordre N !*

⬇

$$\left(\overline{\overline{K}} - \omega_i^2.\overline{\overline{M}}\right).\vec{U} = \vec{0}$$

1 ≤ i ≤ N

d'où

$$\left|\overline{\overline{K}} - \omega_i^2.\overline{\overline{M}}\right| = 0$$

(déterminant système nul pour éviter solution nulle)

⬇

N racines ωi^2 à trouver !!!

Pour N > 3, la recherche de ωi pose problème,
de plus seules les basses fréquences sont utiles.

➡ *On cherche à abaisser la taille du système via l'approximation de RAYLEIGH RITZ…*

Etude b : système à N DDL

<u>Approximation de RAYLEIGH RITZ</u>

A partir d'hypothèses raisonnables sur les aij,
issues de considérations sur la déformée statique et les modes, on pose :

n est le nombre de fréquence propres cherchées
On utilise comme base les n premiers vecteurs propres
*avec **n << N***

$$U1(t) = a_{11}.p_1(t) + a_{12}p_2(t) + \ldots a_{1n}p_n(t)$$

Globalement :

$$\begin{pmatrix} U1(t) \\ \ldots \\ Ui(t) \\ \ldots \\ UN(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a11 & \ldots & ai1 & \ldots & an1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a1i & \ldots & aii & \ldots & ani \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a1N & \ldots & aiN & \ldots & anN \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p1(t) \\ \ldots \\ pi(t) \\ \ldots \\ pn(t) \end{pmatrix}$$

Matrices de passage dans la base des n premiers vecteurs propres

Ordre [N,1] —— [N,n] —— [n,1]

$$\Leftrightarrow \quad \vec{U}(t) = \overline{\overline{A}}.\ \vec{P}(t)$$

Classiquement n = 2 ou 3

Etude b : système à N DDL

<u>*Vers un système réduit…*</u>

$$\overline{\overline{M}}.\ddot{\vec{U}}(t) + \overline{\overline{K}}.\vec{U}(t) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\overline{M}}.\overline{\overline{A}}.\ddot{\vec{P}}(t) + \overline{\overline{K}}.\overline{\overline{A}}.\vec{P}(t) = \vec{0}$$

Les matrices changent de base, passage à la base modale !

$$\Leftrightarrow \overline{\overline{A}}^t.\overline{\overline{M}}.\overline{\overline{A}}.\ddot{\vec{P}}(t) + \overline{\overline{A}}^t.\overline{\overline{K}}.\overline{\overline{A}}.\vec{P}(t) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\overline{M}}^*.\ddot{\vec{P}}(t) + \overline{\overline{K}}^*.\vec{P}(t) = \vec{0} \quad avec \quad \begin{cases} \overline{\overline{M}}^* = \overline{\overline{A}}^t.\overline{\overline{M}}.\overline{\overline{A}} \\ \overline{\overline{K}}^* = \overline{\overline{A}}^t.\overline{\overline{K}}.\overline{\overline{A}}. \end{cases}$$

Matrices réduites
car passées dans la base propre

$$\overline{\overline{M}}^* \quad et \quad \overline{\overline{K}}^* \ matrices \quad symétriques\ [n,n]$$

On réduit le système de N équations en Ui(t) à un système à n équations en pi(t),
plus petit, dont on recherchera n racines ω1 à ωn, tel que n << N.

Engendre une erreur dite erreur de troncature.

Etude b : système à N DDL

Choix de la matrice de passage

$$\begin{pmatrix}U1(t)\\U2(t)\\Ui(t)\\\cdots\\UN(t)\end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc}\vec{a1} & & \vec{ai} & & \vec{an}\end{array} \\ \begin{pmatrix} a11 & \cdots & ai1 & \cdots & an1\\ a12 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a1i & \cdots & aii & \cdots & ani\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a1N & \cdots & aiN & \cdots & anN\end{pmatrix}\end{array} . \begin{pmatrix}p1(t)\\\cdots\\pi(t)\\\cdots\\pn(t)\end{pmatrix}$$

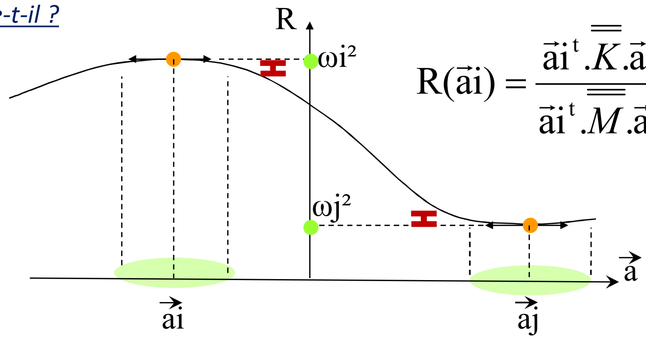
déformée statique

choix arbitraire intuitif éventuellement grossier inspiré des premiers modes propres

Influence l'erreur finale

Etude b : système à N DDL

Pourquoi cela marche-t-il ?

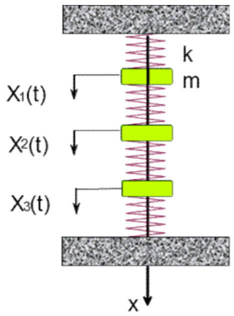


$$R(\vec{ai}) = \frac{\vec{ai}^{\,t}.\overline{\overline{K}}.\vec{ai}}{\vec{ai}^{\,t}.\overline{\overline{M}}.\vec{ai}}$$

Si $\vec{ai}$ est vecteur propre alors la racine $R(\vec{ai})$ correspond à la pulsation propre ωi^2.

Si on choisit $\vec{ai}$ proche du vecteur propre alors $R(\vec{ai})$ correspond **pourtant presque** à ωi^2, de par la forme de la fonction...

Mechanical Vibrations - part 1



$$\overline{\overline{M}} = m.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{K}} = k.\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour les deux premiers modes propres on choisit comme vecteurs propres : $\vec{a}1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{a}2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

A l'aide d'un croquis représentant les vibrations transversales d'une poutre bi-encastrée, justifier ce choix.

En déduire les deux premières pulsations propres approchées…