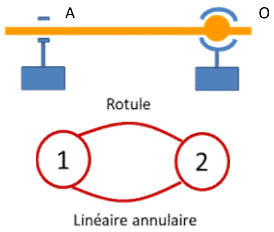


Comment calculer le torseur d'une liaison composée parallèle ?

Par exemple ici il s'agit de trouver la liaison équivalente à la composition parallèle d'une liaison rotule et une liaison linéaire annulaire …

Dans le cas de liaisons assemblées en parallèle les mouvements qui restent possibles sont ceux qui sont compatibles entre toutes les liaisons qui font partie de l'assemblage, ils ne sont donc interdits par aucune liaison.
Pour un observateur il s'agit des zéros qui restent quand toutes les contraintes (degrés de liaisons) sont accumulées de son point de vue.

$$\boxed{Téquivalent = T1 + T2}$$

Ainsi :

Dans l'exemple de la liaison pivot précédente réalisée à l'aide d'une rotule et d'une linéaire annulaire :

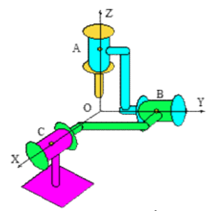
$$Téquivalent = To + TA = \begin{Bmatrix} Xo & 0 \\ Yo & 0 \\ Zo & 0 \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Ya & -d.Za \\ Za & +d.Ya \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} Xo & 0 \\ Yo+YA & -d.ZA \\ Zo+ZA & +d.YA \end{Bmatrix}_O$$

C'est bien une liaison PIVOT d'axe (O.x).

Comment calculer le torseur d'une liaison composée série ?

Par exemple ici il s'agit de trouver la liaison équivalente à la composition série de trois liaisons pivots…

Les mouvements s'ajoutent les uns aux autres, tout degré de liaison sur un axe est annulé dès lors qu'une liberté est autorisée par une des liaisons.



$$\boxed{\begin{aligned} Téquivalent &= T1 \\ Téquivalent &= T2 \\ Téquivalent &= T3 \end{aligned}}$$

$$\begin{Bmatrix} Xe & Le \\ Ye & Me \\ Ze & Ne \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} 0 & La \\ Ya & Ma \\ Za & Na \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} Xb & Lb \\ 0 & Mb \\ Zb & Nb \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} Xc & Lc \\ Yc & Mc \\ 0 & Nc \end{Bmatrix}_O$$

Xe = 0
Ye = 0
Ze = 0

$$Donc\ \ Téquivalent = \begin{Bmatrix} 0 & Le \\ 0 & Me \\ 0 & Ne \end{Bmatrix}_O$$

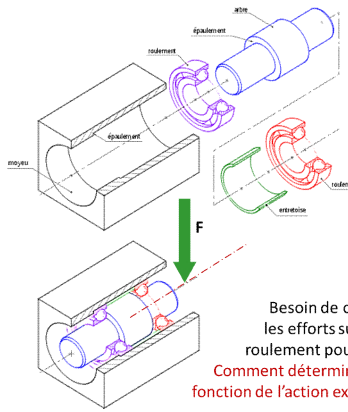
On reconnaît le torseur d'une liaison rotule de centre O !

Dossier 1
Modélisation mathématiques des liaisons mécaniques

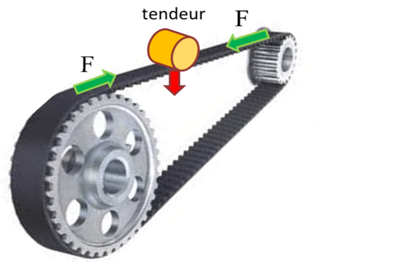
Ce document est une synthèse du cours présenté

Comment déterminer les efforts supportés par une liaison mécanique ?

On considère le guidage d'un arbre de machine tournante.



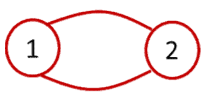
Besoin de connaître les efforts sur chaque roulement pour les choisir.
Comment déterminer ces efforts en fonction de l'action extérieure F = 300 N ?

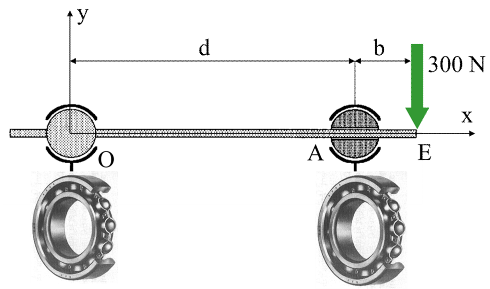


Origine de F : l'arbre est entrainé en rotation par une transmission poulie+courroie. Celle-ci doit être tendue pour bien fonctionner.
→ F = 300 N est issu de la tension de la courroie générée par un tendeur…

Les conditions réelles comprennent des déformations, des frottements et des jeux ce qui est complexe à analyser.
On développe un modèle idéal de liaison qui fonctionne sans jeu ni frottement ni déformation.
C'est le modèle de la liaison parfaite (voir dossier 1)
On gardera en tête les limites de ce modèle mais aussi sa simplicité qui permet de poser des mathématiques sur notre problème.

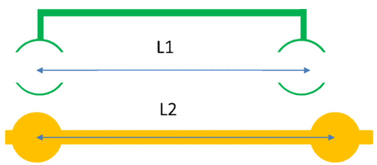
Si on choisit de construire la liaison pivot entre l'arbre tournant et le carter de la machine à l'aide d'un montage dit « en chape » composé d'un coté d'une liaison rotule et de l'autre d'une liaison linéaire annulaire, on obtient le problème suivant.





$$To = \begin{Bmatrix} Xo & 0 \\ Yo & 0 \\ Zo & 0 \end{Bmatrix}_O \qquad TA = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Ya & 0 \\ Za & 0 \end{Bmatrix}_A$$

Pourquoi pas deux liaisons rotules ?



En pratique , impossible de fabriquer L1 = L2
Donc impossible d'assembler !

En ajoutant une translation (linéaire annulaire)
L2 se règle automatiquement à la valeur de L1

Pour trouver les équations on traduit l'équilibre statique de l'arbre dans le moyeu :

PFD cas particulier de la statique.

On écrit chaque torseur et on annule la somme.

- Somme des coordonnées sur 0x = 0
- Somme des coordonnées sur 0y = 0
- Somme des coordonnées sur 0z = 0

Pour les forces et pour les moments

$\Leftrightarrow$ $\quad F\left(\frac{S1}{S2}\right) = \vec{0} \qquad \overrightarrow{M\left(\frac{S1}{S2}\right)} = \vec{0}$

Avec un seul observateur → écrire les torseurs en un point unique !

Un seul observateur impose d'écrire les torseurs au même point, ici O par exemple.

Invariant $\quad$ Varie car fonction du bras de levier

$$TA = \left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Ya & 0 \\ Za & 0 \end{array}\right\}_{A \to O} =$$

L'observateur a changé !

De même pour TE…

$$TE = \left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -300 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{E \to O} =$$

On utilise la relation de
CHAMP de MOMENTS :

$$\boxed{\overrightarrow{m(\vec{F},O)} = \overrightarrow{m(\vec{F},A)} + \vec{F} \wedge \overrightarrow{AO}}$$

Démonstration : on suppose que la force F est appliquée en un point M.

$$\overrightarrow{m(\vec{F},O)} = \vec{F} \wedge \overrightarrow{MO} = \vec{F} \wedge [\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AO})]$$ (Force x Bras de levier)

$$\overrightarrow{m(\vec{F},O)} = \vec{F} \wedge \overrightarrow{MA} + \vec{F} \wedge \overrightarrow{AO}$$

$$\overrightarrow{m(\vec{F},O)} = \overrightarrow{m(\vec{F},A)} + \vec{F} \wedge \overrightarrow{AO}$$

Comment poser le produit vectoriel entre vecteurs d'une même base ?

1. On raye (par la pensée svp !) la ligne de la coordonnée qui va être calculée.
2. On calcule le déterminant (produit croisé) entre les deux lignes restantes.
3. On reporte le résultat à l'endroit de la coordonnée calculée.

Attention pour la deuxième coordonnée on place un signe moins (-) devant le résultat ou bien on calcule le déterminant à l'envers.

Sinon la méthode du tire bouchon reste valable mais elle est assez lourde à utiliser dans ces cas précis.

$$\begin{array}{c} \cancel{X} \quad \cancel{a} \\ Y \wedge b \\ Z \quad c \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} Y*c - Z*b \\ ? \\ ? \end{array}$$

$$\begin{array}{c} X \quad a \\ \cancel{Y} \wedge \cancel{b} \\ Z \quad c \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} Y*c - Z*b \\ -[X*c - Z*a] \\ ? \end{array}$$

$$\begin{array}{c} X \quad a \\ Y \wedge b \\ \cancel{Z} \quad \cancel{c} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} Y*c - Z*b \\ -[X*c - Z*a] \\ X*b - Y*a \end{array}$$

invariant $\quad$ Varie car fonction du bras de levier

$$TA = \left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Ya & 0 \\ Za & 0 \end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{c|c} 0 & \overbrace{0 \quad\quad 0 \quad\quad -d}^{Mo} \\ Ya & 0 + Ya \wedge 0 \\ Za & 0 \quad\quad Za \quad\quad 0 \end{array}\right\}_O = \left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Ya & -d.Za \\ Za & +d.Ya \end{array}\right\}_O$$

$$\vec{M}o = \vec{M}_A + \vec{F}_A \wedge \overrightarrow{AO}$$

L'observateur a changé !

De même pour TE…

$$TE = \left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -300 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_E = \left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \quad\quad 0 \quad\quad -d-b \\ -300 & 0 + -300 \wedge \quad 0 \\ 0 & 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 \end{array}\right\}_O = \left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -300 & 0 \\ 0 & -(d+b).300 \end{array}\right\}_O$$

On pose alors que la somme des torseurs est nulle, coordonnées par coordonnées…

To + TA + TE = $\{\vec{0}|\vec{0}\}$

$$\left\{\begin{array}{c|c} Xo & 0 \\ Yo & 0 \\ Zo & 0 \end{array}\right\}_O + \left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Ya & -d.Za \\ Za & +d.Ya \end{array}\right\}_O + \left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -300 & 0 \\ 0 & -(d+b).300 \end{array}\right\}_O = \left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}$$

effort
$$\left|\begin{array}{l} Xo = 0 \\ -300 + Ya + Yo = 0 \\ Za + Zo = 0 \end{array}\right.$$
moment
$$\left|\begin{array}{l} 0 = 0 \\ -d\ Za = 0 \\ -300\,d - 300\,b + d\ Ya = 0 \end{array}\right.$$

solution
$$\left|\begin{array}{l} Xo = 0 \\ Yo = -300.b/d \\ Zo = 0 \\ Ya = 300.(1+b/d) \\ Za = 0 \end{array}\right.$$

Permet désormais de calculer la durée de vie du roulement à billes…

D'après les expressions des efforts obtenues, on observe qu'Il faut chercher à augmenter d et à diminuer b pour diminuer les efforts de liaison…

On le voit, le modèle de la liaison parfaite permet de « mathématiser » les liaisons mécaniques courantes.
Grâce à lui il devient possible d'appliquer les principes de la mécanique pour aboutir éventuellement sur une phase d'optimisation lors de la partie conception du système mécanique étudié.
C'est le travail de l'ingénieur en mécanique….