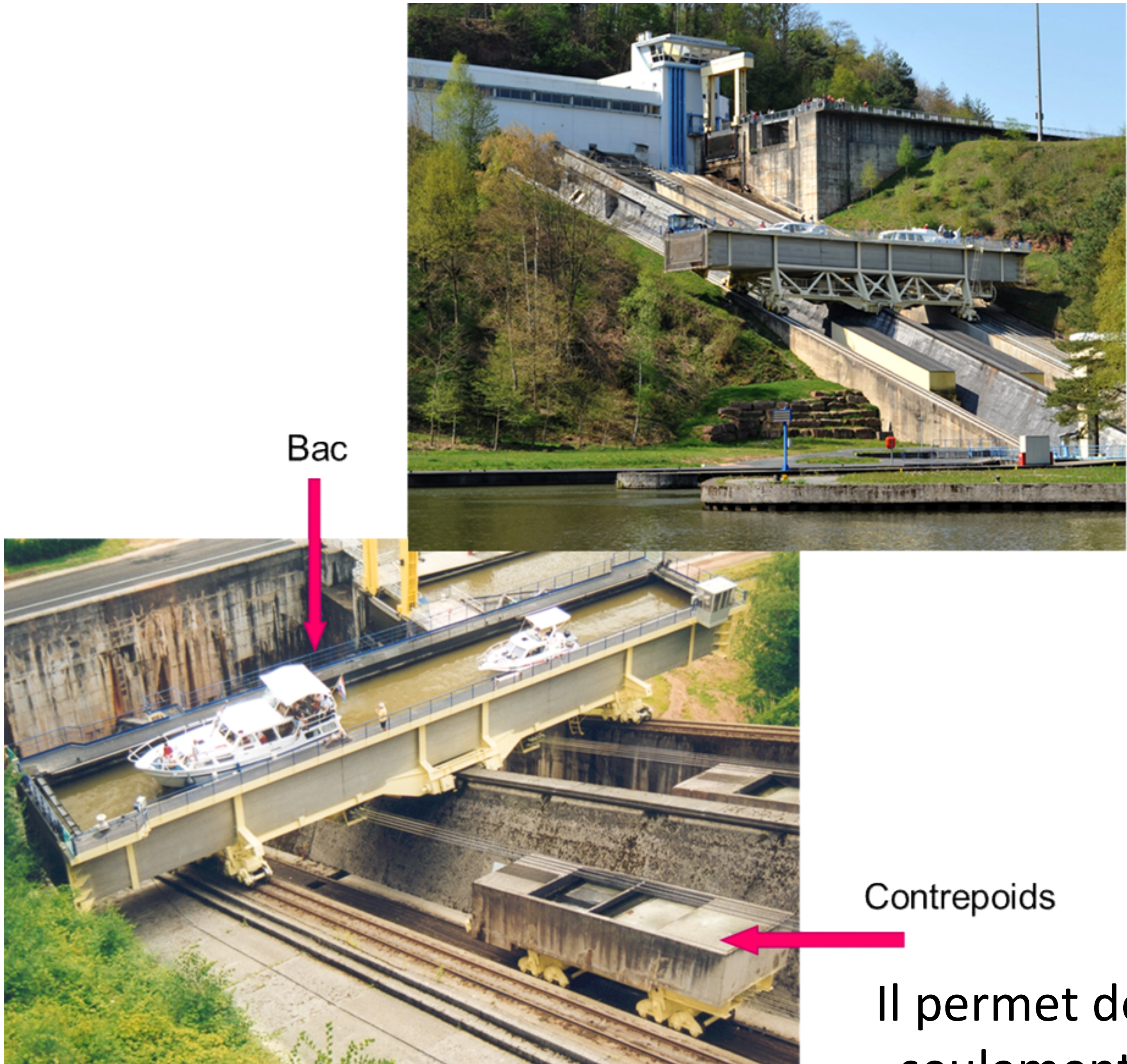
Mécanique des systèmes

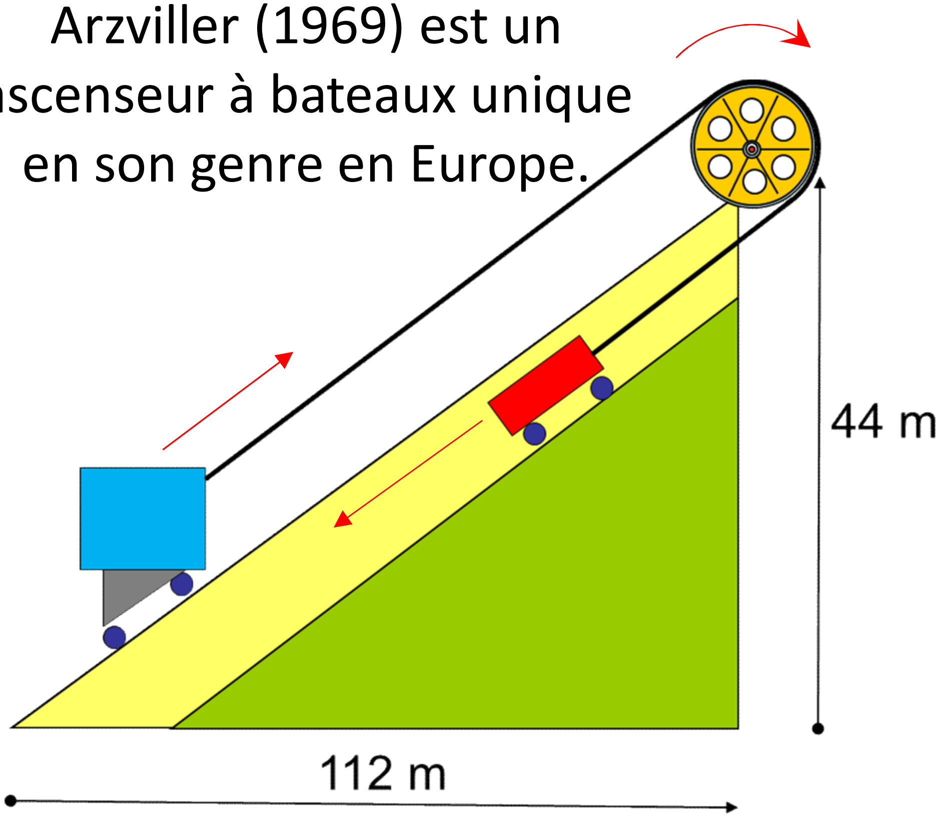
Version 2024

Etude n°2

Cette étude porte sur les rotations.

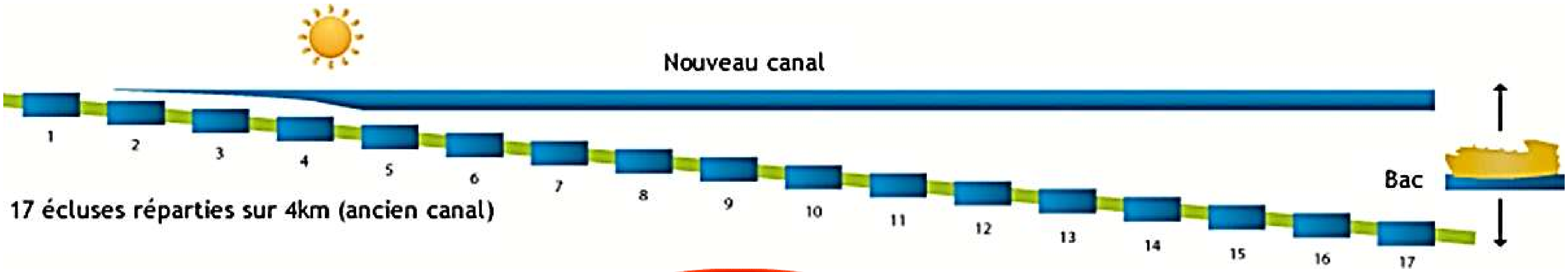


Le Plan Incliné de Saint-Louis Arzviller (1969) est un ascenseur à bateaux unique en son genre en Europe.

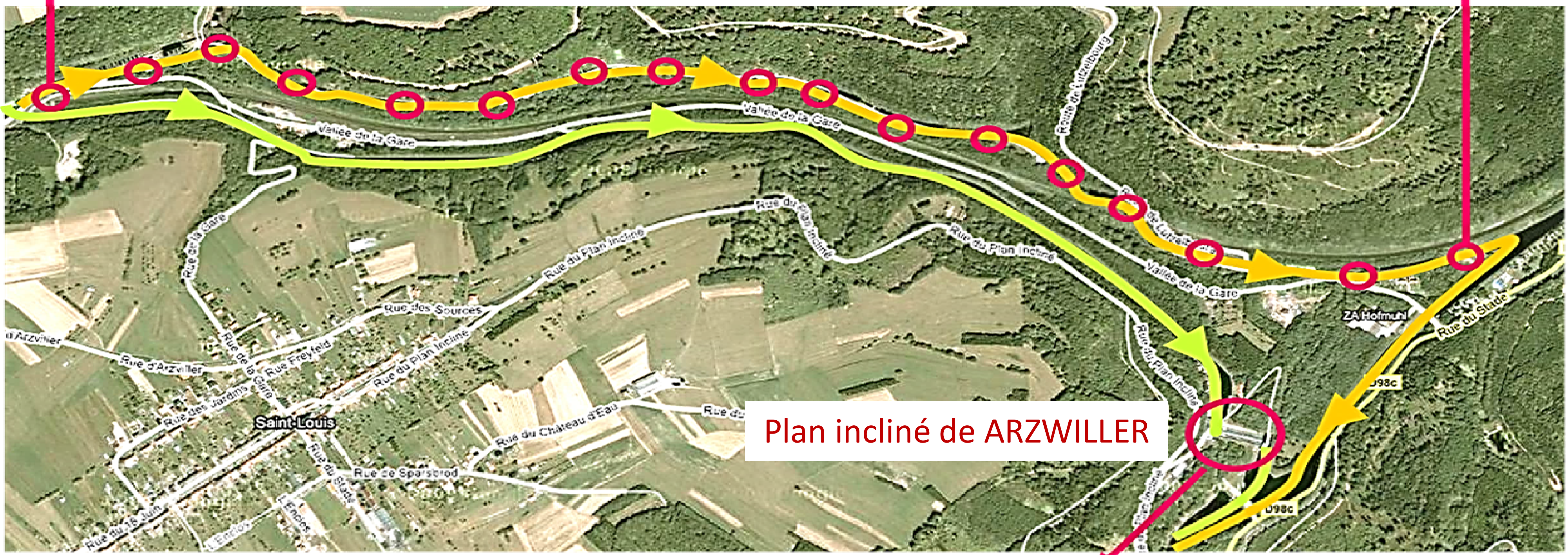


Il permet de franchir une altitude de 44 m en 4 mn seulement contre 8 heures via 17 écluses sinon !

Etude n°2



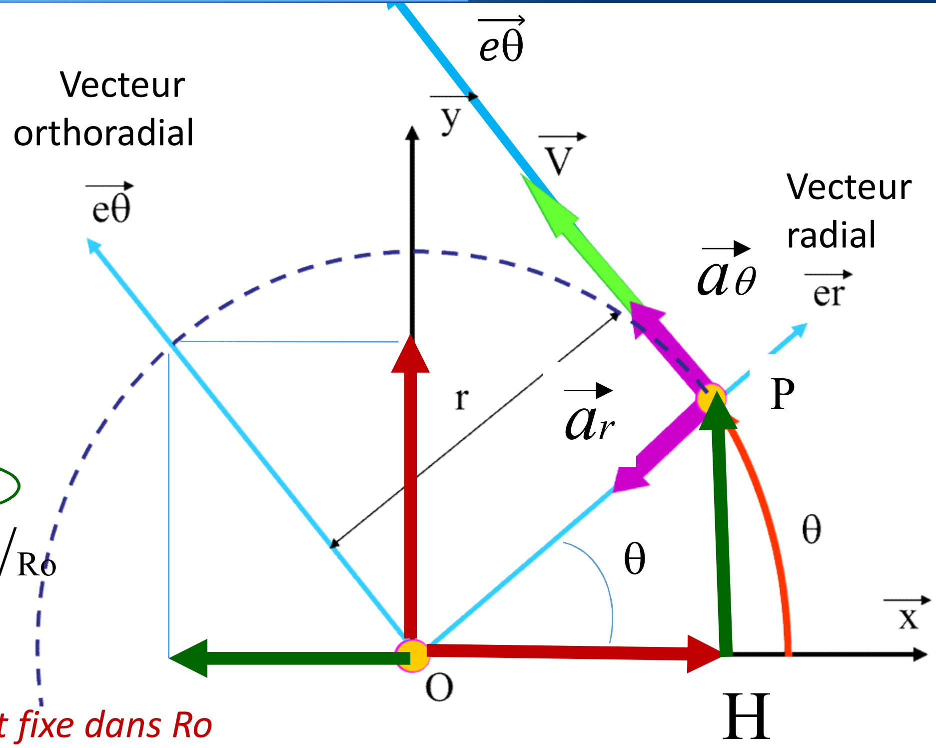
Écluse 1 → 8 heures → Écluse 17



4 minutes ! ← Plan incliné

Etude n°2

Comment calculer une vitesse lors d'un mouvement circulaire ?



$$\overrightarrow{OP} = r.\overrightarrow{er}$$

(uv)' = u'v + uv'

$$\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}/_{Ro} = \frac{d(r.\overrightarrow{er})}{dt}/_{Ro} = \underbrace{\frac{d(r)}{dt}}_{=0\ \text{rayon constant}}/_{Ro}.\ \overrightarrow{er} + \underbrace{\frac{r.d(\overrightarrow{er})}{dt}}/_{Ro}$$

=0 rayon constant

Attention er n'est fixe dans Ro
Comment dériver une flèche qui n'est pas une constante ?
→ On peut projeter le vecteur dans la base d'observation ainsi les vecteurs qui apparaissent sont fixes/observateur.

$$r.\overrightarrow{er} = r * \cos\theta(t)\,.\,\vec{x} + r * \sin\theta(t)\,.\,\vec{y}$$

*On dérive (fog) → (fog)' = g'*f'(g).*
(cos θ)' = θ'(-sin θ)*
(sin θ)' = θ'(+cos θ)*

$$\vec{V}\left(\frac{P}{Ro}\right) = \frac{r.d(\cos\theta(t).\vec{x} + \sin\theta(t).\vec{y})}{dt}/_{Ro} = r.\theta'.\underbrace{(\sin\theta.\overrightarrow{(-x)} + \cos\theta.\overrightarrow{+y})}_{\overrightarrow{e\theta}}$$

Les dérivées de x et y sont nulles car ils appartiennent à l'observateur.

$\overrightarrow{e\theta}$ Vecteur tangent au cercle trajectoire

Etude n°2

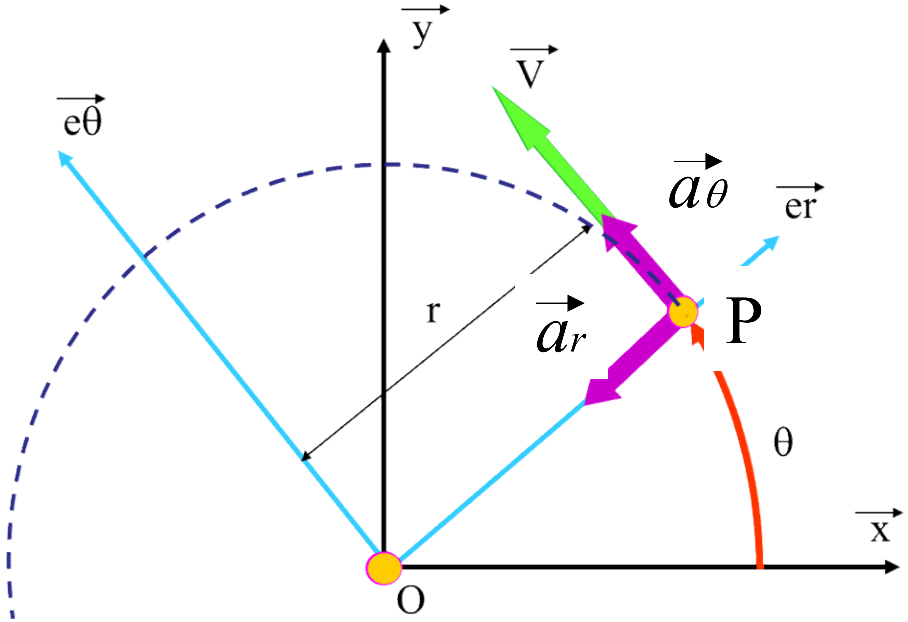
Comment calculer une accélération lors d’un mouvement circulaire ?

Constat : quand on dérive un vecteur tournant à la vitesse θ',
On le fait pivoter de $\pi/2$ et on multiplie son intensité par θ'.
Ainsi « er » a pivoté sur « eθ ».

$$\overrightarrow{a\left(\frac{M}{Ro}\right)} = \frac{d\overrightarrow{V(\frac{M}{Ro})}}{dt}/_{Ro} = \frac{d(r.\theta'.\overrightarrow{e\theta})}{dt}/_{Ro}$$

$$= \frac{d(r\theta')}{dt}/_{Ro}.\,\overrightarrow{e\theta} + \frac{r\theta'.d(\overrightarrow{e\theta})}{dt}/_{Ro}$$

$$= \underbrace{r\theta''.\,\overrightarrow{e\theta}}_{a\theta\ \text{tangentielle}} + \underbrace{r\theta'*\theta'.\,(-\overrightarrow{er})}_{ar\ \text{centripète}}$$

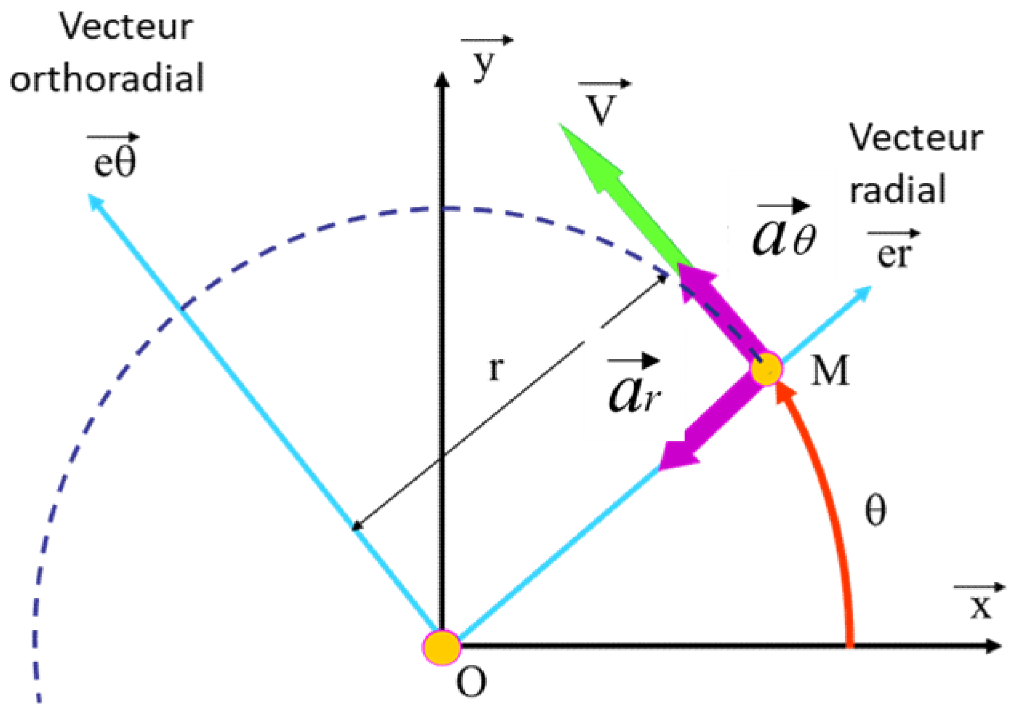


La vitesse est tangentielle : $\vec{V} = r.\theta'.\vec{e}_\theta$
L’accélération est centripète et tangentielle : $\vec{a}_r = -r.\theta'^2.\vec{e}_r$
$\vec{a}_\theta = r.\theta''.\vec{e}_\theta$

Remarque : en régime permanent θ' est constant donc $\theta'' = 0$ et $a\theta = 0$

Etude n°2

Qu'est ce que le moment dynamique ?



Le moment dynamique est développé par les quantités d'accélérations (m.a pour un point) qui s'exercent sur la matière en mouvement de rotation transitoire.

$$\vec{\delta} \text{ de } M \text{ en } O = -\, m.\, \vec{a\theta}.r$$
$$= -\, m.r^2.\theta''.\vec{e\theta}$$

[N.m]

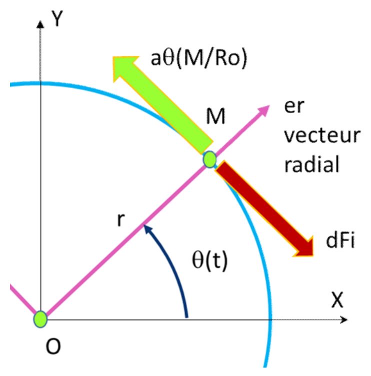
Etude n°2

Pour un solide en rotation que vaut le moment dynamique?

C'est la somme des moments développés par les quantités d'accélérations qui varient selon le point matériel considéré puisque « a » dépend de « r »...
Si O est le point d'observation :

$$\overrightarrow{\delta(S,O)} = -\int_S \overrightarrow{M(dFi,O)} = -\int_S dFi.r.(-\vec{z})$$

Moment dynamique opposé au moment inertiel



= rθ''

Tous les points ont le même

$$= +\int_S a\theta\left(\frac{M}{Ro}\right).r.dm.\vec{z} = +\left\{\underbrace{\int_S r^2.dm}\right\}.\;''.\vec{z}$$

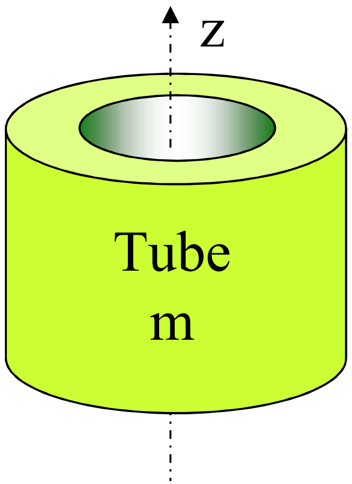
« ar » ne développe pas de moment puisque passant par O.

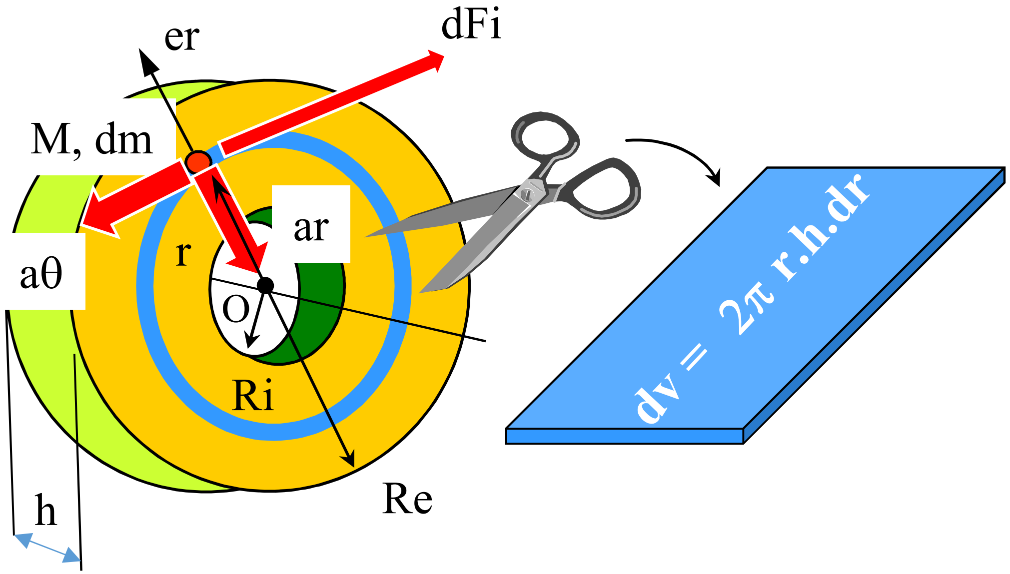
Moment d'inertie axial souvent noté JOz ou C [kg.m²]

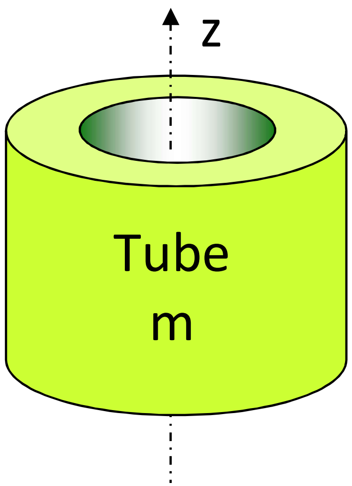
$$\boxed{\overrightarrow{\delta(S,O)} = JOz.\frac{d\omega}{dt}.\vec{z}}$$

Etude n°2

Moment d'inertie pour un tube ?



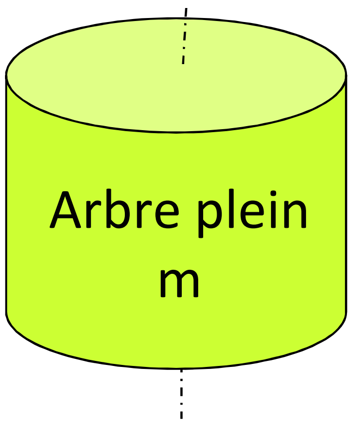




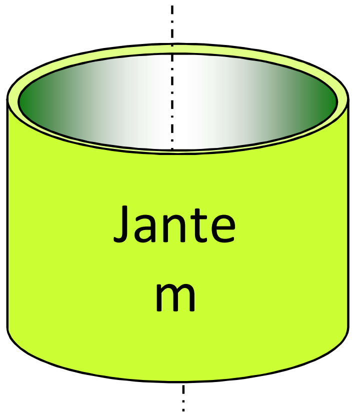
Re = rayon extérieur
Ri = rayon intérieur

$$Jz = m_{(tube)}.\frac{(Re^2 + Ri^2)}{2}$$

Ri = 0



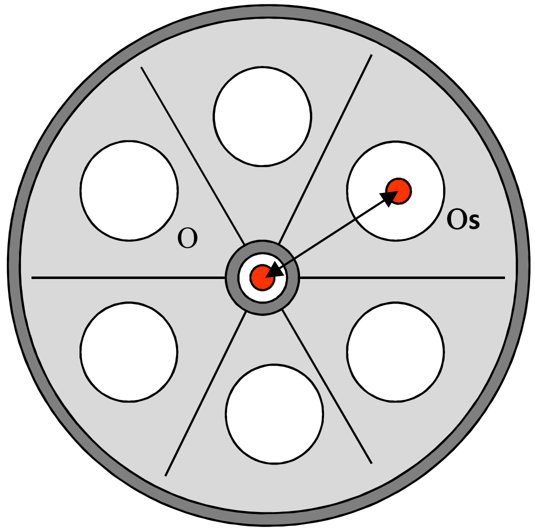
Ri $\rightarrow$ Re



Etude n°2

Quand transférer l'axe du moment d'inertie ?

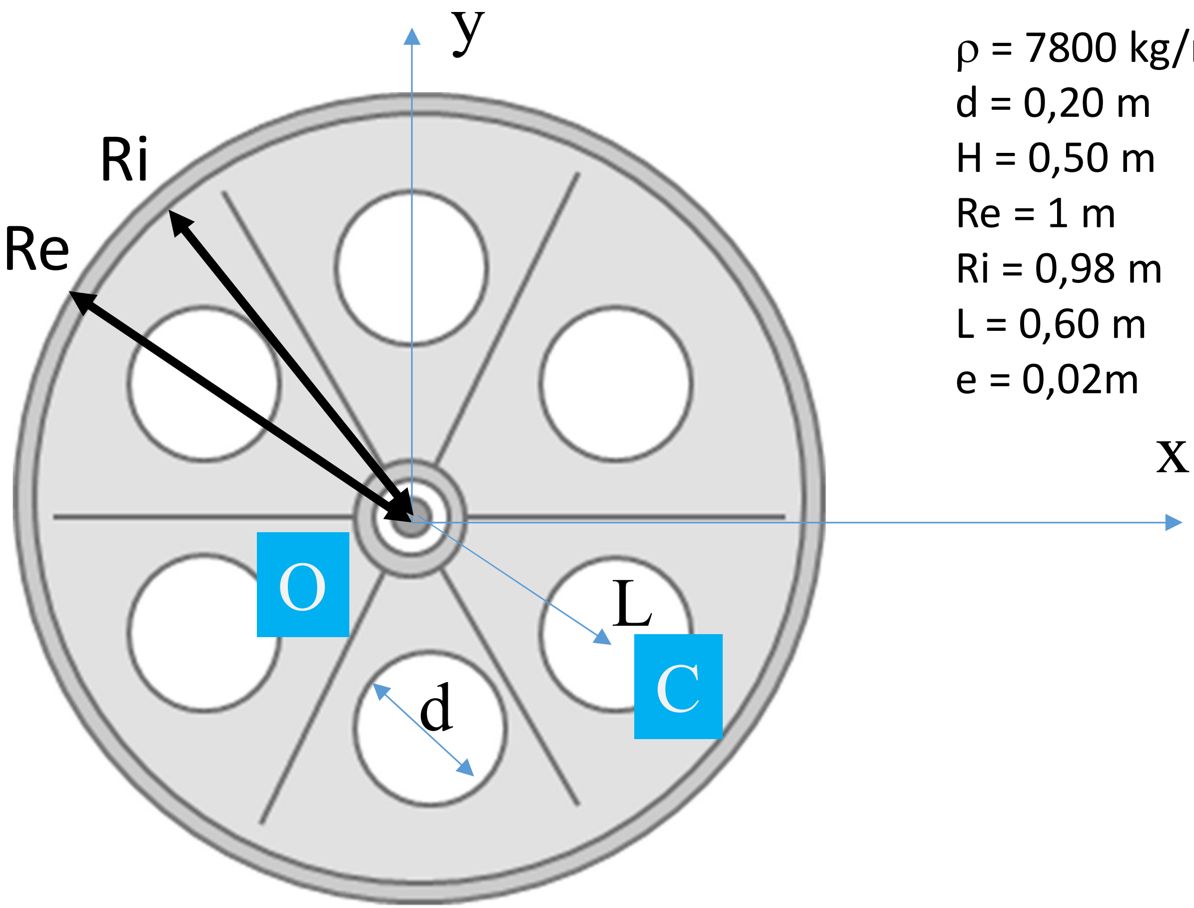
Le transfert est obligatoire si le solide ne tourne pas autour de son axe.



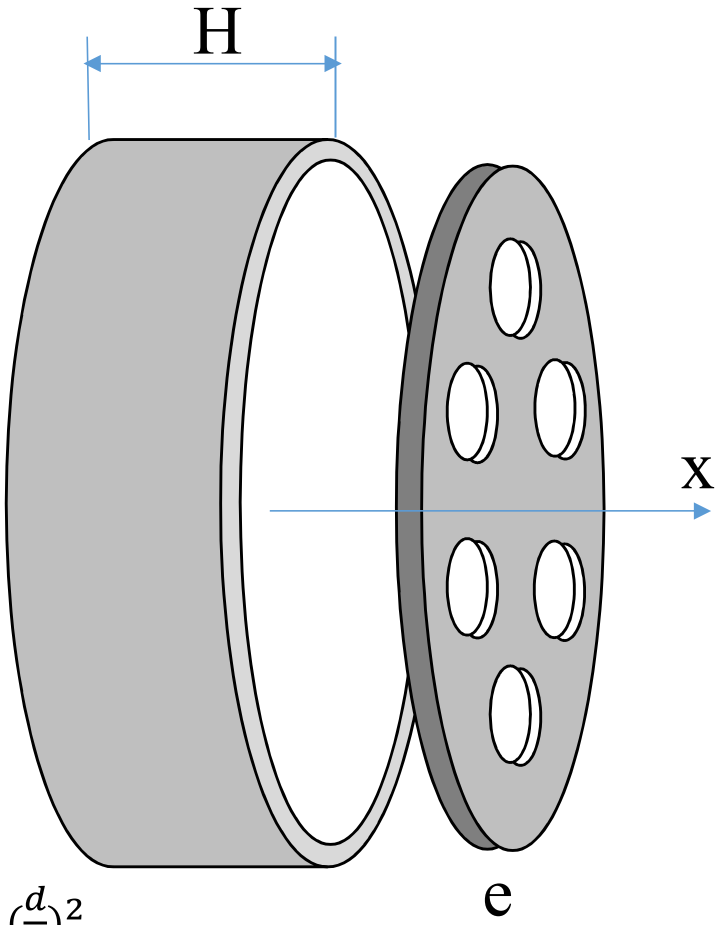
Relation de Huygens (Os=G)

$J/0z = J/Gz + M.OG^2$

Etude n°2



ρ = 7800 kg/m3
d = 0,20 m
H = 0,50 m
Re = 1 m
Ri = 0,98 m
L = 0,60 m
e = 0,02m



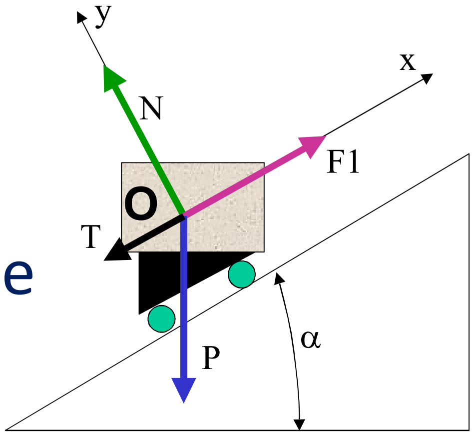
$$JOz = mtube.\frac{Re^2+Ri^2}{2} + mdisque.\,.\frac{Re^2}{2} - 6.\{mtrou.\,\frac{(\frac{d}{2})^2}{2} + mtrou.L^2\}$$

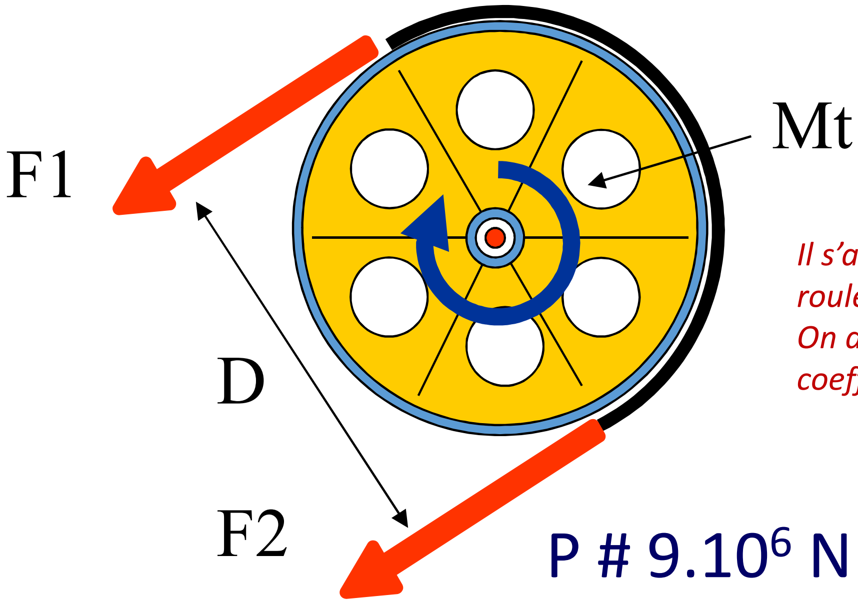
$$JOz = \rho\pi.(Re^2 - Ri^2).H.\frac{Re^2+Ri^2}{2} + \rho\pi.Re^2.e\,.\frac{Re^2}{2} - 6.\,\rho\pi.\frac{d^2}{4}.H\{\frac{d^2}{8} + L^2\}$$

$$JOz = 950 + 245 - 11 = 1184\ kg.m^2$$

Etude n°2

Bac
en montée





Il s'agit en fait de frottement de roulement
On assimile à du glissement à faible coefficient

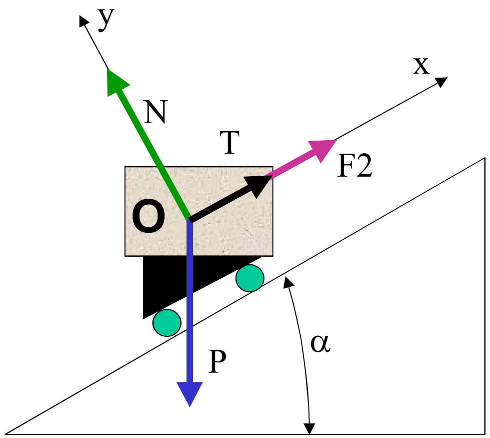
$P \# 9.10^6$ N

$\alpha \# 22°$

f = 0.02

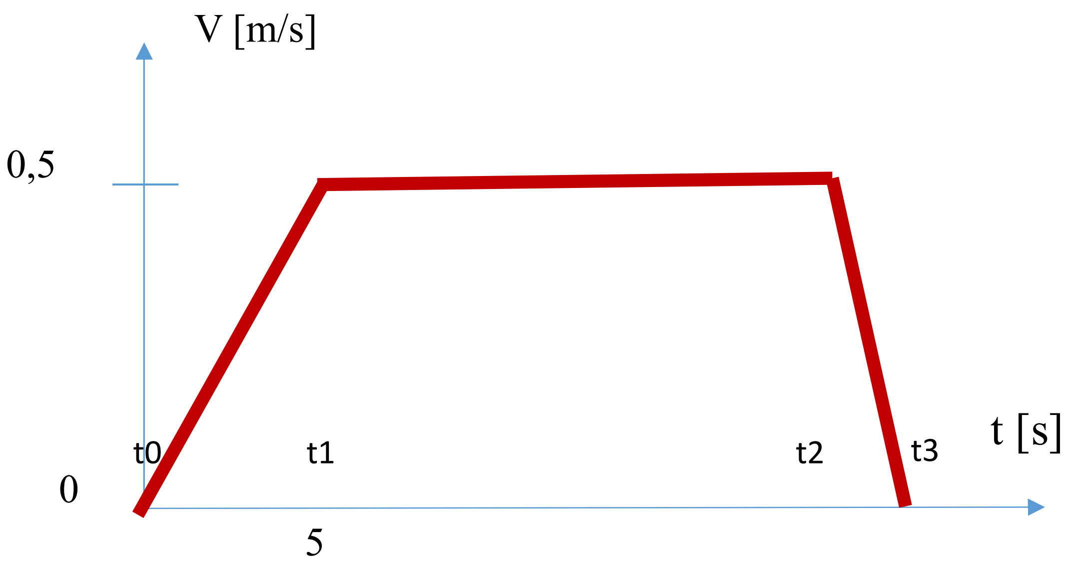
D = 2 m

Contrepoids
en descente



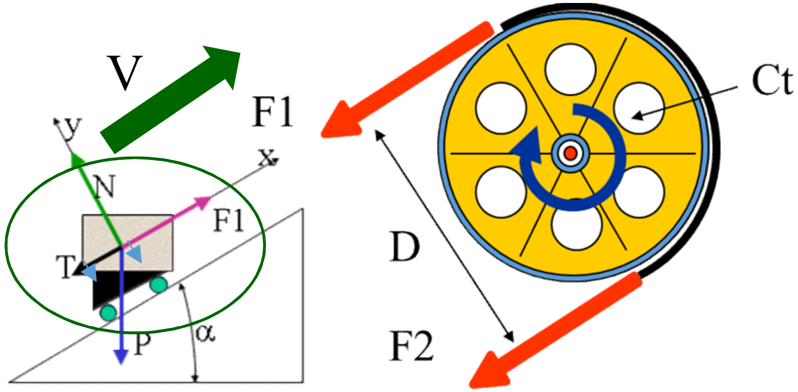
Valeur de Mt,
moment sur le tambour ?

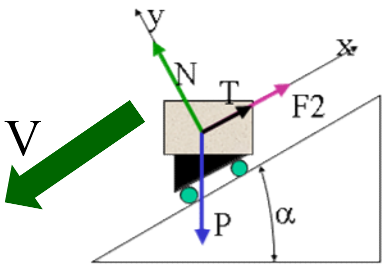
Etude n°2



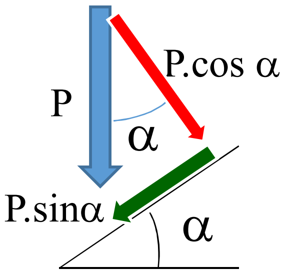
$$a = \frac{v1 - v}{t1 - t0} = 0,1 \text{ m/s}^2$$

Etude n°2





T opposé à V



S = tambour

$\overline{S} = moteur + câble\ \sup + câble\ inf$

$$-Mt * \vec{z} + F1.\frac{D}{2} * \vec{z} - F2.\frac{D}{2} * \vec{z} = JOz.\frac{d\omega}{dt}.\vec{z}$$

Appliquer PFD à bac — *Appliquer PFD à contrepoids* — *AppliquerThéorème de HUYGENS*

S = chariot bac

$\overline{S} = la\ Terre + câble\ \sup + rails$

$$\vec{P} + \overrightarrow{F1} + \vec{N} + \vec{T} = m * \vec{a}bac/R$$

S = contrepoids

$\overline{S} = la\ Terre + câble\ \inf + rails$

$$\vec{P} + \overrightarrow{F2} + \vec{N} + \vec{T} = m * \vec{a}cp/R$$

$$\left.\begin{array}{l} -P\sin\alpha + F1 - T = ma \\ -P\sin\alpha + F2 + T = -\ ma \end{array}\right\} F1 - F2 = 2(T+ma)$$

$N - P\cos\alpha = 0$

$T = f.N$

$$F1 - F2 = 2m.(f.g.\cos\alpha + a)$$

Etude n°2

négatif

$$-Mt * \vec{z} + F1.\frac{D}{2} * \vec{z} - F2.\frac{D}{2} * \vec{z} = JOz.\frac{d\omega}{dt}.\vec{z}$$

$$Mt = +(F1 - F2).\frac{D}{2} + JOz.\left|\frac{d\omega}{dt}\right| \qquad V = \omega.\frac{D}{2} \rightarrow a = \frac{d\omega}{dt}.\frac{D}{2}$$

$$Mt = +2\text{m}.(\text{f}.\text{g}.\cos\alpha + \text{a}).\frac{D}{2} + JOz.\frac{2a}{D}$$

Inertie tambour

$$Mt = \underbrace{\underbrace{\text{f}.\text{m}.\text{g}.D.\cos\alpha}_{164\,851\ \text{Nm}} + \underbrace{[JOz + mD^2/2]}_{90\,236\ \text{N.m}}.\frac{2a}{D}}_{\rightarrow\ 255\,087\ \text{Nm !!!}}$$

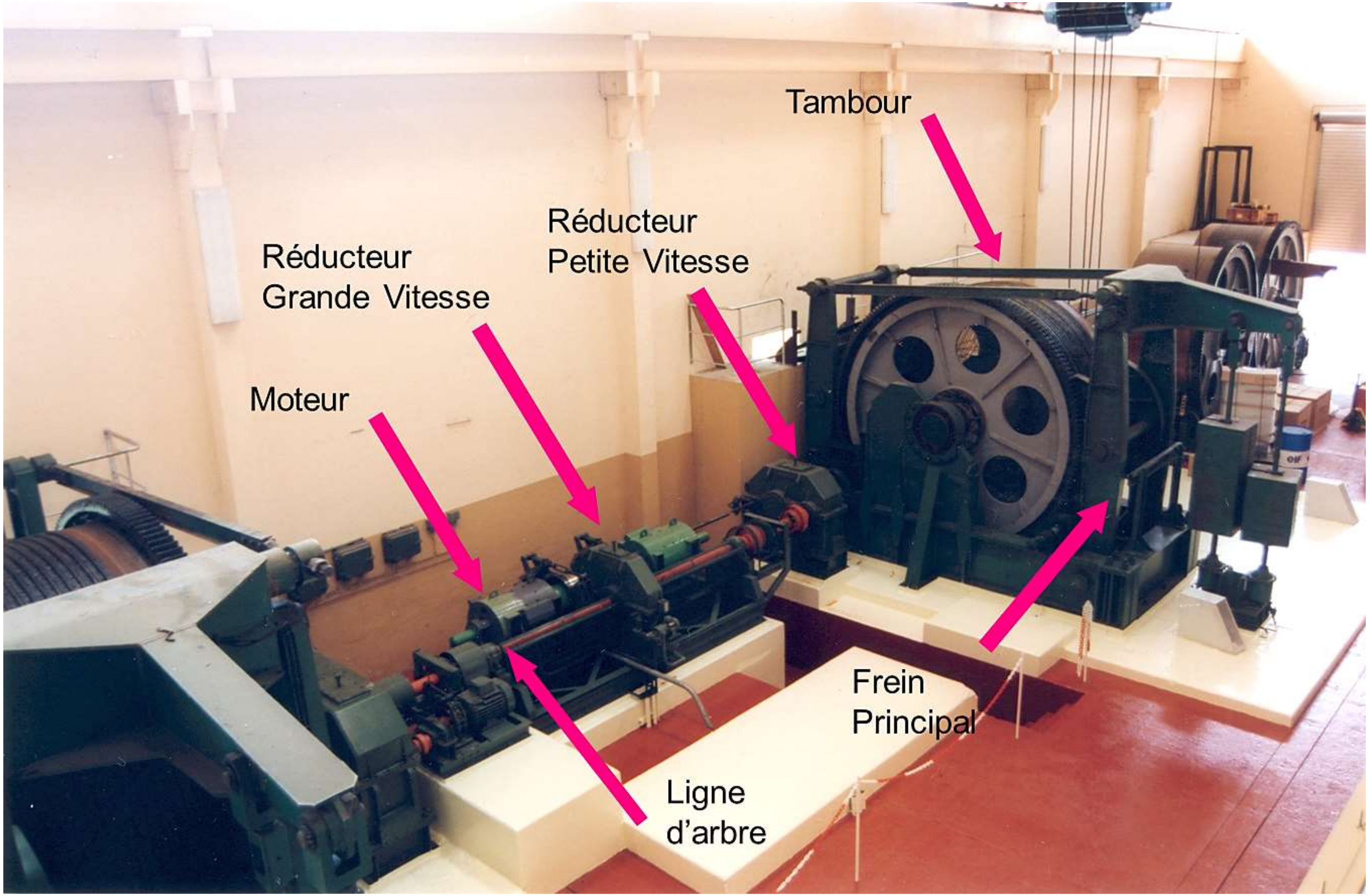
Inertie bac + CP ramenée sur tambour

f = 0,02
m = 900 Tonnes
Re= D/2 = 1 m
Joz = 1184 kg.m²
a = 0,1 m/s²
α = Arctan(44/112) = 22°

Attention, un moteur ne peut pas assurer ce couple, sauf si un adaptateur de couple est intercalé entre moteur et tambour.

→ réducteur de vitesse obligatoire !

Etude n°2


Tambour
Réducteur
Petite Vitesse
Réducteur
Grande Vitesse
Moteur
Frein
Principal
Ligne
d'arbre