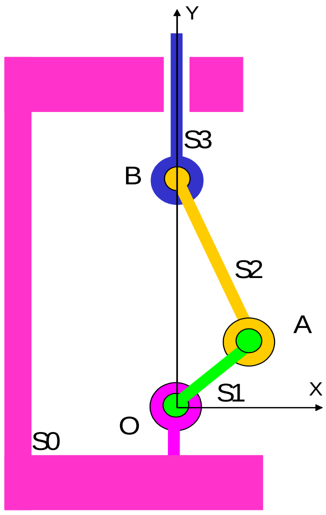
L2 SPI – Mécanique Du Solide

<u>Examen du 08/01/2019</u>
<u>Aucun document autorisé</u>
<u>Durée 2h</u>

EXERCICE 1 (8 points)

La figure suivante schématise un système bielle-manivelle très courant dans les systèmes mécaniques (pompe ou moteur).
Le solide (S1) tourne de façon uniforme autour du point O à la vitesse N= 3000 tr/mn.
Le mouvement est transmis par la bielle (S2) et le solide (S3) effectue une translation alternée dans (S0).
Les liaisons aux point O, A et B sont des pivots.



<u>Travail demandé :</u>

➊ La trajectoire de A est un cercle de centre O. La distance [OA] étant égale à 0,025 m, calculer puis tracer sur le document réponse la vitesse $\vec{V}(A \in S1/S0)$. On prendra pour échelle 1 cm → 1 m/s.

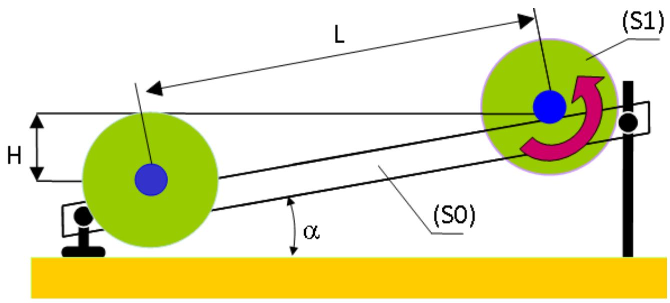
➋ Déterminer $\vec{V}(B \in S2/S0)$ par équiprojectivité.

➌ Déterminer alors $\vec{V}(B \in S3/S0)$.

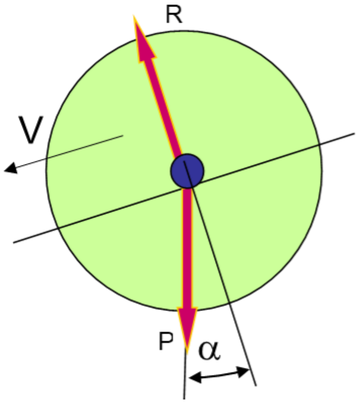
➍ Chercher enfin le lieu du CIR (centre instantané de rotation) de (S2) par rapport à (S0).

EXERCICE 2 (12 points)

L'axe cylindrique de rayon r d'un disque (S1) de diamètre D est posé sur un rail incliné (SO). Le disque peut rouler sur le rail de longueur L et descendre celui-ci d'une hauteur H. Sa vitesse de rotation est ω et sa vitesse de translation est V.
Ainsi, sa vitesse finale de rotation est alors ωf et sa vitesse de translation finale est Vf.
On note J le moment d'inertie du disque relativement à son axe de rotation.



On note R l'action du rail sur ce solide et P son poids.



<u>Travail demandé :</u>

➊ Ecrire la relation entre V, ω et r.

➋ Sachant que le mouvement ***<u>le long du rail</u>*** *est un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'équation $x = g.\frac{t^2}{2}.\sin\alpha$, montrer que si T est le temps mis par le disque pour descendre le rail, on a :*

$$Vf = \frac{2L}{T}$$ *où Vf est la vitesse finale acquise.*

❸ *Déterminer les puissances développées par les forces P et R sur le disque dans son mouvement de descente du rail (So).*

❹ *Déterminer l'expression de l'énergie cinétique du disque par rapport au rail (So).*

❺ *Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au solide (S1) quand il descend le rail (So). Montrer alors que l'intégrale première du mouvement du disque est :*

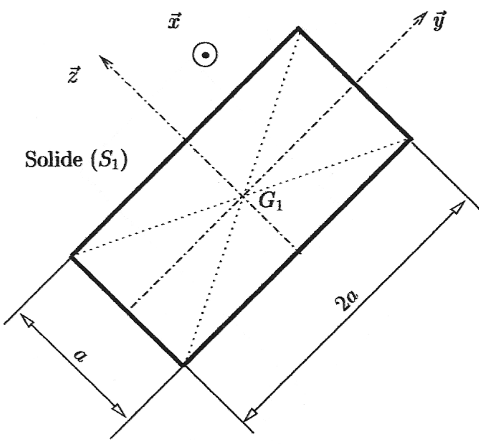
$$\mathrm{MgH} = \frac{1}{2}\mathrm{M(Vf)}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{J}.(\omega f)^2$$

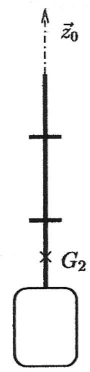
❻ *En déduire enfin l'expression de J en fonction notamment de T, temps total de la descente.*

EXERCICE 3 (20 points)

Un solide (S) est constitué de 2 parties soudées l'une à l'autre.

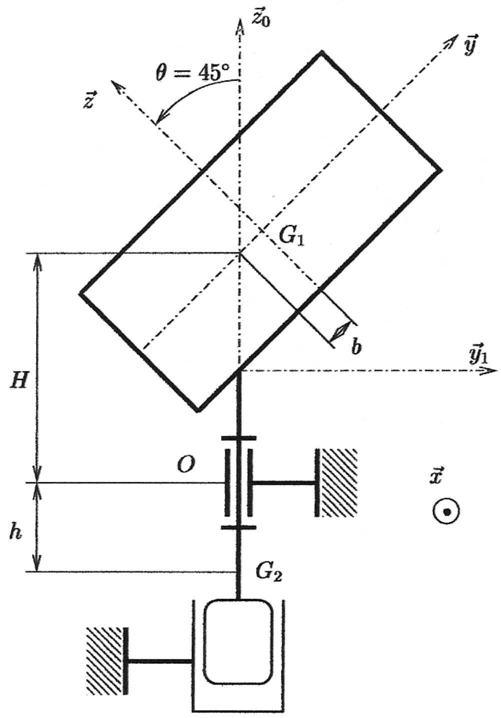
- Une plaque rectangulaire (S1) de centre de gravité G1, de largeur a (suivant $(G1,\vec{z})$), de longueur 2a (suivant $(G1,\vec{y})$), d'épaisseur e (suivant $(G1,\vec{x})$), fabriquée en acier de masse volumique ρ1 ;
- Un axe et le rotor d'un moteur (S2) de masse m2 et de centre de gravité G2. (S2) possède l'axe $(G2,\vec{z}_0)$ comme axe de révolution matérielle: on notera I2 le moment d'inertie de (S2) autour de cet axe $(G2,\vec{z}_0)$.





Solide (S_2)

La solide (S) est en liaison pivot parfaite d'axe $(O,\vec{z}_0)$ avec le repère galiléen $Ro(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.



On souhaite connaître la valeur du couple moteur C qui permet de mettre en rotation le solide (S) d'une vitesse initiale nulle ($\psi'_{(t=0)} = 0$) à la vitesse de ($\psi'_{(t=T)} = \psi'_0$) en un laps de temps T.

On remarquera que les plans $(O;\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ et $(O;\vec{y},\vec{z})$ sont confondus et dans le plan de la plaque.

On note les bases orthonormées directes $Bo(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, $B_1(\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ et $B(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

La plaque est inclinée d'un angle constant : $\theta(t) = 45° = \langle \vec{y}_1,\vec{y} \rangle = \langle \vec{z}_0,\vec{z} \rangle$.

Le paramètre angulaire de la rotation de la liaison pivot de (S) par rapport à Ro est : $\psi(t) = \langle \vec{x}_0, \vec{x} \rangle = \langle \vec{y}_0, \vec{y}_1 \rangle$ mesuré positivement autour de $(G2, \vec{z}_0)$.

L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g.\vec{z}_0$.

Le solide (S) {par l'intermédiaire de l'axe (S2) est soumis à l'action d'un moteur électrique. Cette action est caractérisée par le torseur couple : $T(mot/S) = \left\{ \vec{0} \middle| C.\vec{z} \right\}_{G1ouG2}$.

On donne:

$\overrightarrow{OG_1} = H.\vec{z}_0 + b.\vec{y}$ et $\overrightarrow{OG_2} = -h.\vec{z}_0$

$$\overline{\overline{\mathrm{I}}}(G_1, S_1) = J.\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{BaseB}$$

$$\overline{\overline{\mathrm{I}}}(O, S_2) = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}_{(*,*,\vec{z}_0)}$$

H=30cm	g = 9.8 m/s²
b=4cm	I_2 = 0.001 kg.m²
h = 10 cm	ψ'_0= 1000 tr/mn
T = 0.1 s	m2=2kg

<u>*Travail demandé :*</u>

❶ *Calculer, dans la base B1* $\vec{V}(G1/R0)$ et $\vec{\Gamma}(G1/R0)$.

❷ *Calculer, dans la base B,* $\vec{\sigma}(G1, S1/R0)$.

❸ *Calculer, dans la base B1,* $\vec{\sigma}(O, S1/R0)$.

❹ *Calculer, dans la base B1,* $\vec{\sigma}(O, S2/R0)$.

❺ *En déduire* $\vec{\sigma}(O, S/R0)$ *dans la base B1.*

❻ *Calculer, dans la base B1,* $\vec{\delta}(O, S/R0)$.

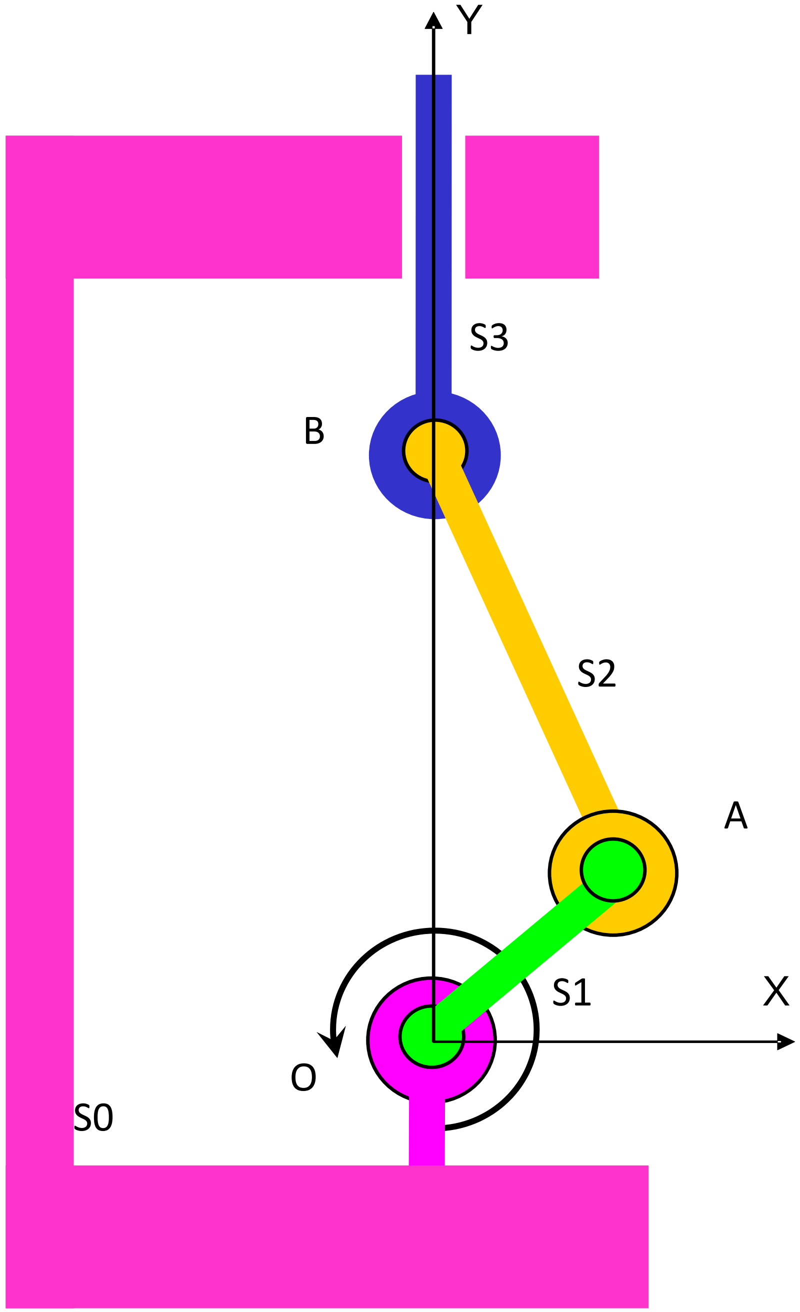
❼ *Enumérez les actions mécaniques exercées sur le solide (S) et appliquez le principe fondamental de la dynamique au solide (S).*
En déduire 2 équations vectorielles. Projetez ces équations vectorielles afin d'obtenir des équations scalaires.

❽ *En supposant que le couple moteur est constant durant le laps de temps [0,T], tracer l'évolution de* $\psi'(t)$*.*

❾ *En déduire les valeurs de* ψ'' *puis de C.*

❿ *Calculer numériquement les composantes (dans (B1)) des résultante et moment en O de l'action de Ro sur (S) au niveau de la liaison pivot.*

ꕥ ⌘ ꕥ


Y
S3
B
S2
A
S1
X
O
S0

Au cas où…

Ces relations sont écrites pour un solide (S) homogène de masse "m", de centre d'inertie "G". Un repère "R" est lié à (S), son origine étant "Os".
Un point quelconque de (S) est appelé "M" de coordonnées (x,y,z) dans "R" et un point particulier de (S) est appelé "A".
Le solide (S) est en mouvement dans un repère "Ro" supposé galiléen.

Champ des vitesses d'un solide (S) par rapport à "Ro" :

$$\vec{V}(A,S/Ro)=\vec{V}(B,S/Ro)+\left\{\vec{\Omega}(S/Ro)\wedge\overrightarrow{BA}\right\}$$

Matrice d'inertie écrite en "Os" de (S) dans le repère "R" :

$$\overline{\overline{I}}(Os,S)=\begin{pmatrix} \int_S (y^2+z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ -\int_S xydm & \int_S (x^2+z^2)dm & -\int_S yzdm \\ -\int_S xzdm & -\int_S yzdm & \int_S (x^2+y^2)dm \end{pmatrix}$$

Moment cinétique en "A" de (S) par rapport à "Ro" :

$$\vec{\sigma}(A,S/Ro)=\overline{\overline{I}}(Os,S).\vec{\Omega}(S/Ro)+m\,\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(Os,S/Ro)+m\,\overrightarrow{AOs}\wedge\left\{\vec{\Omega}(S/Ro)\wedge\overrightarrow{OsG}\right\}$$

Moment dynamique en "A" de (S) par rapport à "Ro" :

$$\vec{\delta}(A,S/Ro)=\left\{\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(A,S/Ro)\right\}_{Ro}+m\vec{V}(A,S/Ro)\wedge\vec{V}(G,S/Ro)$$

Double de l'énergie cinétique de (S) par rapport à "Ro" :

$$2Ec(S/Ro)=m\vec{V}(A,S/Ro)^2+\vec{\Omega}(S/Ro).\left\{\overline{\overline{I}}(A,S).\vec{\Omega}(S/Ro)\right\}+2m\left\{\vec{V}(A,S/Ro),\vec{\Omega}(S/Ro),\overrightarrow{AG}\right\}$$

La puissance développée par Σ sur S dans son mouvement dans R est le comoment entre le torseur d'actions mécaniques de Σ sur S et le torseur distributeur des vitesses de S dans R, soit : P(Σ/S,S/R) = T(Σ/S).V(S/R)

TEC

$$\frac{d}{dt}Ec(E/Rg)=\mathrm{P}(\overline{\mathrm{E}}/\mathrm{E},\mathrm{E}/\mathrm{Rg})+\sum_{\substack{j,i=1\\ j\neq i}}^{j,i=n}P(Sj/Si,Si/Rg)$$